数学の散歩道

山下　紀幸

2004 年 3 月 22 日

1　3^{1234} の下２桁を求める

［解］

$3^2 \equiv 9(mod100)$
$3^4 \equiv 81(mod100)$
$3^8 \equiv 81 * 81 \equiv 61(mod100)$
$3^{10} \equiv 9 * 61 \equiv 49(mod100)$
$3^{20} \equiv 49 * 49 \equiv 1(mod100)$

である．
$1234 = 20 * 61 + 14$
だから

$$3^{1234} = ((3^{20})^{61}) * 3^{14} \equiv 3^{14} \equiv (3^4) * 3^{10} \equiv 81 * 49 \equiv 69(mod100)$$

これにより，下 2 桁は，69 である．

1.1　次の方程式をみたす正整数を求める

$(360 + 3x)^2 = 492y04$
［解］与えられた式の左辺は $(3 * (120 + x))^2$ だから，9 で割り切れる．
y に 0〜9 までの数値を入れた数列を作り，9 で割り切れる数を求める．

```
(i.10),:9|429004+100*i.10
```

```
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 0 1
```

上記の数列の中で，適合するのは 8 だけだから，y は 8 である．

```
((%:492804)-360)%3
```

```
114
```

従って，x は 114 である．

1.2　62ab427 が 99 の倍数であるとき，a,b を求める

［解］

$10^2 \equiv 1(mod 99)$ から次式が導ける．

$$(10^2)^n \equiv 1^n (mod 99)$$

62ab427=$6*10^6 + (20 + a) * 10^4 + (10b + 4) * 10^2 + 27$

従って，２桁ずつの数字の和が 99 で割り切れれば，元の数も 99 で割り切れる．

２桁ずつの数字の和を 99 とおくと

$$6 + 20 + a + 10b + 4 + 27 = a + 10b + 57 = 99$$

a+10b=42

従って，a=2,b=4 が求められる．（検算：6224427/99=62873）

参考資料

(1) ローレン・C・ラーソン：数学発想ゼミナール，p.132,160，シュプリンガー・フェアラーク社，1986

2　1000!の 10 進法表示の末尾に 249 個の 0 が並ぶことを示せ

［解］

r を 10 と互いに素な整数として，$1000! = (2^a)*(5^b)*r$ とおく．　a ≧ b　であることは明白だから，1000! の表示の末尾の 0 の個数は b と等しい．よって，b を求めればよい．

数列，1,2,3,4,5,6,—,1000 の項は 5 番目ごとに 5 で割り切れるので，数列の中には　<.1000%5=200　個の 5 の倍数がある．数列の項は，25 番目ごとに 25 で割り切れるので，数列の中には，　<.1000%25=40　個の 25 の倍数があり，それは新たな因数 5 を 40 個加えることになる．

数列の 125 おきの数は 125 で割り切れ，またそれぞれ 5 を因数にもち，それは　<.1000%125=8　個ある．また，625 おきの数も 5 を因数にもち，それは　<.1000%625=1　個である．そこで，

b=(<.1000%5)+(<.1000%25)+(<.1000%125)+<.1000%625=200+40+8+1=249　である．

［検算］100!について，J と UBASIC で確認してみた．

```
 [J]
    <.100%5
20
    <.100%25
4
    b=20+4=24
 [UBASIC]
list
   10  'kaijou
   20  s=1
   30  for k=1 to 100
   40    s=s*k
   50  next k
   60  print s
   70  end
ok

run
 9332621544394415268169923885626670049071596826438162146859296389521759
 9999322991560894146397615651828625369792082722375825118521091686400000
 00000000000000000000
```


参考資料

(1) ローレン・C・ラーソン：数学発想ゼミナール，p.146，シュプリンガー・フェアラーク社，1986

3　欠けた数の再現

次の掛け算は正しいのだが，プリンターの故障で，答の１つの数字が x になってしまった．再計算をせずに，x を求めよ．

172195572167 = 985242*x*6565

［解］

十一去法（奇数桁の数字の和から偶数桁の数字の和を引いたものが 11 で割り切れる時，元の数字も 11 で割り切れる.）を用いた.

```
   11|a=.(5+1+7)-(9+2+1)=.1
1
   11|b=.(7+1+7)-(6+2+5)=.2
2
```

２つの数を 11 で割った時それぞれ余りがあれば，２つの数を掛けた数を 11 で割った時の余りは両方の余りを掛けたものになる．そこで，985242x6565 の x に 0～9 の数字を代入した場合を十一去法で計算してみた．

```
   (5+5+x+4+5+9)-(6+6+2+2+8)=.(28+x)-24=.4+x
   (i.10),:11|4+i.10

0 1 2 3 4 5  6 7 8 9
4 5 6 7 8 9 10 0 1 2
```

従って，x=.9

となる．

[J による検算 (1)]

```
 11|98524296565
2
```

[J による検算 (2)]

```
  98524296565%172195
572167
```

参考資料

(1) H．スターク：初等整数論，p.76，現代数学社，2000

4　エジプトの分数式 (1)

1/2 や 1/3 のように，分子が１の分数を単位分数と呼ぶ．そして，分子が１でない勝手な分数を異なる単位分数の和で表すことを，エジプトの分数式と呼ぶ．例えば，

$$2/3 = 1/2 + 1/6, 2/5 = 1/3 + 1/15$$

はエジプトの分数式である．

では，2/35 はどのようなエジプトの分数式で表されるか．２つの単位分数の和とする時を考えよ．

［解］2/35 をエジプトの分数式で表すということは，２つの異なる数 a, b を使って，

$$2/35 = 1/a + 1/b$$

とすることである．

いま，a<b　と決めると，a は 17.5(= 35/2) より大きく，35 より小さい数となる．このため，a は 18 から 34 までの数である．そこで，a にこれらの数を代入して，２つの単位分数の和になる組み合わせを求める．

```
egypt=: 3 : 0
('p';'q')=.y.
a=.>.q%p
while. a<q
  do.
  b=.(q*a)%(p*a)-q
  if.(b-<.b)=0 do.wr a,b end.
  a=.a+1
end.
''
)

egypt 2 35
18 630
20 140
21 105
30 42
```

したがって，２つの単位分数の和になるのは，

```
2/35 = 1/18 + 1/630, 2/35 = 1/20 + 1/140
2/35 = 1/21 + 1/105, 2/35 = 1/30 + 1/42
```

の４通りである．

参考資料

(1) 中村義作：どこまで解ける西洋の算法 (BLUE BACKS B-1151)，p.45，講談社，1996

5　エジプトの分数式（２）

前回のエジプトの分数式では，２つの単位分数に限定して複数組の答を求めた．

ここでは，できるだけ大きな単位分数（つまり分母の小さな）をとることを繰り返す方法を採った．これは後のことを考えずにガツガツしていることから欲張りアルゴリズム（greedy algorithm）と呼ばれている．

下記のプログラムは，UBASIC の JPC 版であるが，整数桁での計算力に差がある（UBASIC では 2600 桁）ため，結果に多少の誤差を生じることがある．

［JPC］

```
greedy=: 3 : 0
    q=.y.
    while. q ~: 0
    do.
      n=.>.% q
      wr n
      q=.q - % n
    end.
    ''
    )

    greedy 4%17
5
29
1233
3039346
9.23881e12
1.80474e26

    greedy 16%17
2
3
10
128
32640
```

［UBASIC］

```
10  'greedy
    20  input "展開したい分数";Q
    30  repeat
    40    N=ceil(1//Q):print N,
    50    Q-=1//N
    60  until Q=0
    70  print

  80  end

run
展開したい分数？ 4//17
5       29      1233     3039345

run
展開したい分数？ 16//17
2       3        10       128       32640
```

参考資料

(1) 木田祐司：UBASIC によるコンピュータ整数論，p.12，日本評論社，1997

6　数学オリンピック 1979 年イギリス大会での問題

［問題］

p,q は,

$$p/q = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots - 1/1318 + 1/1319$$

となるような正整数である．このとき，p が 1979 で割り切れることを示せ.

［解］

この問題は解析的に求める答が出ている.

$$p/q = (1 + 1/2 + 1/3 + - - - + 1/1318 + 1/1319) - 2(1/2 + 1/4 + 1/6 + - - - + 1/1318)$$

=1/660+1/661+—+1/1318+1/1319)

=(1/660+1/1319)+(1/661+1/1318)+—+(1/989+1/990)

=1979/(660*1319)+1979/(661*1318)+—1979/(989*990)

=1979*A/(660*1319*—*989*990)

1979 は素数だから，分母（660～990 の積）とは互いに素となり，約分は起らず，p は 1979 の倍数となる.

解析的方法によらないで，直接 J61 による計算可能性を確かめるために数値を小さくしてトライしてみた. J の最新版による多倍長演算なら，上記の問題が直接解けるのかもしれない.

［小型化した問題］

p,q は,

$$p/q = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots - 1/14 + 1/15$$

となるような正整数である．このとき，p が 23 で割り切れることを示せ.

［J61］

```
    ]a=.>:i.15
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
    ]b=.*./a
360360
    ]c=.-/b%a
261395
    23|c
0
```

参考資料

(1) 小島寛之：数学オリンピック問題にみる現代数学 (BLUE BACKS B-1054)，p.58，講談社，1995

7　1729 というおかしな数

ハーディーがラマヌジャンを見舞いに行った時のことだが，ハーディの乗ってきたタクシーの番号が 1729 で平凡な番号だというのを聞いたラマヌジャンは目を輝かせて「$1729=1^3+12^3=9^3+10^3$で，1729 はこのように 2 つの 3 乗数の和への分解が二通りもある最初の数です」と言った．上記以外にもいろいろある 1729 に関するおかしな話を紹介したい．

7.1　1729 は，３乗数の和への分解が２通りある最初の数である

1〜13 までの数の 3 乗数の和のクロス表を作り，下記の関数を使って 1729 の出現頻度を求めた．

```
order=./:˜&,
acum=.˜.,"0(+/"1@=)

|:acum order a+/a=.(>:i.13)^3
```

```
2 9 16 28 35 54 65 --- 1547 1974 1729 1736 1755 --- 3925 4394
1 2  1  2  2  1  2 ---    2    2    4    2    2 ---    2    1
```

上記のように，クロス表の対角線上にある数（2,16,54,–4394）の出現頻度は 1 で，それ以外の数は対角線を挟んで対称位置の 2 箇所に現われるのに対して，1729 は 4 箇所に現われ，$1729=1^3+12^3=9^3+10^3$ の 2 通りに分解される最初の数である．

［解析解］

まず，(x,y) を $x^3+y^3=1729$ を満足する整数解とする．このとき

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=1729=71319$$

となる．よって，1729 のすべての可能な因数分解 1729=A*B を考えて，

$$x+y=A, x^2-xy+y^2=B$$

を解けばよいことになる．y=A-x を 2 番目の式に代入すれば，

$$3x^2-3Ax+A^2-B=0$$

を得る．従ってそれぞれの因数分解 1729=A*B に対して，

$$(3A\pm\quad(12B-3A^2))/6$$

が整数かどうかを調べることが必要になる．そこでこれを行うと，

$$(A,B)=(13,133)=(19,91)$$

のときだけ整数解が得られることがわかり，これから (x,y) を求めれば

$$(9, 10), (10, 9), (1, 12), (12, 1)$$

の４つの整数解が求められる．従って

$$1729 = 9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3$$

となる．

7.2

1729 は 19*91 のように，各数字を足した数と，その回文数との積に分解される．

```
 sp=: 3 : 0
   ('p';'q')=.y.
   while. p<:q
   do.
     c=.+/(4#10)#:p
     if.(c|p)=0 do. wr p,c,p%c end.
     p=.p+1
   end.
 ''
    )

   sp 1725 1730
1725 15 115
1728 18 96
1729 19 91
```

似たような数は他にもあった．

```
   sp 1455 1460
1455 15 97
1456 16 91
1458 18 81
```

7.3

1729 は合成数なのに，「フェルマーの小定理」が成立する疑似素数である．
「フェルマーの小定理」とは，n が素数で，n と a が互いに素の時は， $a^{(n-1)}$ は n で割りきれるというものである．

1729 は 19*91 のように合成数であるが，あたかも素数であるような振舞いをする．ここでは，1729 は奇数なので，a は 2 とした．

2^{1728} は大き過ぎる数であり，直接 J61 では計算できないので便法を考える．

```
    1729|2^36
1
```

という関係式と，1728=36*48 **という関係式を組み合わせると，**

```
    1729|1^48
1
```

即ち，合成数であるにも拘らず「フェルマーの小定理」が成立してしまう．では，このような数は他にもあるのだろうかというと，実は 561 がそうである．

```
    561|2^40
1
    560=40*14
```

だから

```
    561|1^14
1
```

参考資料

(1) 足立恒雄：フェルマーを読む，p.99，日本評論社，1986

8　フェルマの因数分解

ある数 n の約数を見つけるのに，

$$n = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

を利用する方法をフェルマの因数分解という．上記の式を変形すると，

$$x^2 - n = y^2$$

となるので，n より大きい平方数をとり，それから n を引いて，差が平方数になるかどうかを調べればよい．

```
yakusuu=: 3 : 0
n=.y.
k=.>.%:n
while. k<:n
do.
  p=.%:((k*k)-n)
  if. (p-<.p)=0  do. k,p,(k + p),k-p  break. end.
  k=.k+1
end.
)
yakusuu 13837
119 18 137 101
```

約数は，137 と 101 である．［検算］137 x 101 = 13837

8.1　フェルマー・テストと２進法

n は，$2^{(n-1)} \equiv 1(modn)$ のときに限り素数であると考えられていた．n が 340 までの数については正しかったが，341 は $2^{340} \equiv 1(mod341)$ を満足する合成数である．

このことは，哲学者のライプニッツが証明した．以下はその計算法である．

$$2^{340} - 1 = (2^5 - 1)(2^{335} + 2^{330} + 2^{325} + - - - + 1)$$

それで $2^5 - 1 = 31$ で割れる．

同様に，

$2^{340} - 1 = (2^{10} - 1)(2^{330} + 2^{320} + 2^{310} + - - - + 1)$

それで $2^{10} - 1 = 1023 = 11 * 93$ で割れるから，11 で割れる．このことから，$2^{340} - 1$ は $31 * 11 = 341$ で割れる．

別の方法として，2 の冪を 11 で割った余りを並べると，

```
a,:11|a=.2^i.11
```

```
1 2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024
1 2 4 8  5 10  9   7   3   6    1
```

のように，$2^{10} = 1024$ から余りは繰り返される．それで，$2^{340} - 1$ は 11 で割れる．同じように，31 で割った余りは 5 の周期を持つ．すなわち，

```
      b,:31|b=.2^i.6
1 2 4 8 16 32
1 2 4 8 16  1
```

それで，$2^{340} - 1$ はやはり 31 で割りきれる．だから，$31 * 11 = 341$ で割り切れることになり，$2^{340} \equiv 1(mod 341)$ となる．

参考資料

(1) 好田順治：素数の不思議，p.137，現代数学社，1999

(2) 好田順治：素数の不思議，p.90，現代数学社，1999

9　約数と，約数の和を求める

ある数の約数をすべて求めるには，２で割り，３で割り，４で割り，…と，やっていくのが面倒だが，単純である．

約数をすべてということで，１も表示する手続きを考える．N/2 より大きい数で割っても無意味なので N/2 までの数で割る．

```
yakuze=: 3 : 0
n=.y.
s=.0[b=.1
while. b<:n%2
do.
  if. (n-(<.n%b)*b)~:0  do. goto_0. end.
  wr b, s=.s+b
  label_0. b=.b+1
end.
''
)

yakuze 28
1 1
2 3
4 7
7 14
14 28
```

完全数に似た概念として親和数がある．二つの整数があり，それぞれ自分自身を除く約数の和が相手の数になる時，この二つの整数は，お互いに親和数であるという．　一番知られている親和数は 220 と 284 である．

上記の yakuze 関数を使って簡単に確認できる．

9.1　完全数に関するユークリッドの定理

完全数について，ユークリッドは次の定理を見つけた．

「　$2^n(2^{(n+1)}-1$ の形の数は，$2^{(n+1)}-1$ が素数ならば偶数の完全数である」

そこで，$2^{(n+1)}-1$ が素数かどうかを判定して，素数ならば $2^2(2^{(n+1)}-1)$ を求めるとよいことになる．

```
kaneuc=: 3 : 0
  m=.y.
  n=.1
  while. n<:m
  do.
```

```
        b=.2
        a=.(2^(n+1))-1
        label_0. if. b>%:a+1 do. goto_1 end.
        if. (a-(<.a%b)*b)=0 do. goto_2 end.
        b=.b+1
        goto_0.
        label_1. wr (2^n)*a
        label_2. n=.n+1
      end.
     ''
      )

      kaneuc 12
6
28
496
8128
335503e7
```

9.2　再現数

4 + 9 + 1 + 3 を計算して 3 乗すると答は 4913 である．このように 1 桁の数 n 個を加えて累乗したものが，元の n 個の数字を書き並べたものになるものを再現数という．

3 乗した結果が再現数になる 4 桁の数は，4,9,1,3 の他に 5,8,3,2 がある．

それでは，J で確認してみる．

```
    saigensu=: 3 : 0
    ('p';'q')=. y.
    while. p<:q
    do.
      c=.+/(4#10)#:p
      if.(c^3)=p do. wr p end.
      p=.p+1
    end.
    ''
    )

    saigensu 1000 9999
4913
```

5832

参考資料

(1) 何森　仁：パソコンで楽しむ高校数学，p.23，サイエンス社，1991
(2) 上野富美夫：数学パズル事典，p.36，東京堂出版，2000

10　試し割り算

整数論の問題を解いているとき，ある数を因数分解したいとか，その数は素数かということを調べたくなる事がよくあります．素因数分解のプログラムを使わなくても，2〜　n までの全部の数で割る方法があります．無駄も多いようですが，結構便利です．

```
    bunkai=: 3 : 0
    n=.y.[d=.2
    while. d<<.%:n
    do.
      if. (d|n)=0 do. wr d,n%d end.
      d=.d+1
    end.
    ''
    )

    bunkai 71489
11 6499
67 1067
97 737
```

10.1　素因数分解

J の最新版には q:という便利な関数があるが，一応自前の関数を作ってみた．

```
      soin=: 3 : 0
      n=.y.
      label_1. b=.2
      label_2. if. b>%:n+1 do. goto_4. end.
      if. (n-(<.n%b)*b)=0 do. goto_3. end.
      b=.b+1
      goto_2.
      label_3. wr b
      n=.n%b
      goto_1.
      label_4. n
      )

      soin 71489
    11
```

67

97

参考資料

(1) 木田祐司：UBASIC によるコンピュータ整数論，p.167，日本評論社，1997

11　覆面算

［問題］

```
   H O C U S
 + P O C U S
 ----------
 P R E S T O
```
の各英字に数をあてはめよ．

［解］

各英字を各桁の係数と考えると，次式が得られる．

$$10000*H + 10000*P + 2000*O + 200*C + 20*U + 2*S$$

=100000*P+10000*R+1000*E+100*S+10*T+O

上式を整理すると

$$1999*O - 98*S = 99000*P + 10000*R - 10000*H + 1000*E - 200*C - 20*U$$

左辺の O と S の係数は 1999 と_98 であり，右辺は全部 10 で割りきれるので，1〜9 までの O,S について，左辺が MOD 10 で 0 になる組合せを調べた．

```
   i9=.>:i.9
   a=.1999*i9
   b=._98*i9
   i9,.10|a+/b
1 1 3 5 7 9 1 3 5 7
2 0 2 4 6 8 0 2 4 6
3 9 1 3 5 7 9 1 3 5
4 8 0 2 4 6 8 0 2 4
5 7 9 1 3 5 7 9 1 3
6 6 8 0 2 4 6 8 0 2
7 5 7 9 1 3 5 7 9 1
8 4 6 8 0 2 4 6 8 0
9 3 5 7 9 1 3 5 7 9
```

従って，O と S の組合せには (2,6),(4,7),—があるが，O=2,S=6 を採り上げる．

２桁目は，繰り上げがあるので，2*U+1=T となる．組合せは (2,5),(3,7),–があるが，2 は使用済みなので，U=3,T=7 とする．

３桁目は，繰り上げがないので，2*C=6 or 16 となる．C=3 or 8 であるが，3 は使用済みなので，C=8 とする．

４桁目は，繰り上げがあるので，E=2*2+1=5 となる．

６桁目の P は，２数の合計による繰り上げなので，P=1 となる．

５桁目は，繰り上げがないので，H=9,R=0 となる．

従って，１つの解は

```
  9 2 8 3 6
+ 1 2 8 3 6
-----------
1 0 5 6 7 2
```

となる．他の解があるかも知れませんが，確かめてありません．

参考資料

(1) O・オア：整数論（SMSG 新数学双書-12），p.111，河出書房新社

12　平方数のパズル

［問題］

連続する 2 桁の整数で，その平方数が数字の位置だけが異なっている組として，　$13^2 = 169, 14^2 = 196$ がある．ところで連続する整数で，その平方数が数字の位置だけが異なっている組が 3 桁では 2 組ある．それはどのような整数か.

［解］

数字の位置の異なる 2 つの数を判別するのに，各桁の数字を採りだし，小さい順に並び変えたものを数値化して同じであるかどうかの判定をする方法を採った.

```
puzz31=: 3 : 0
('p';'q')=.y.
while. p<:q
do.
  ('a0';'a1';'a2';'a3')=.(4#10)#:p^2
  a5=.10#.a4/:a4=.a0,a1,a2,a3
  ('b0';'b1';'b2';'b3')=.(4#10)#:(p+1)^2
  b5=.10#.b4/:b4=.b0,b1,b2,b3
  if. a5=b5 do. wr p,(p+1),(p^2),(p+1)^2 end.
  p=.p+1
end.
''
)

   puzz31 100 999
157 158 24649 24964
913 914 833569 835396
```

13　累乗再現数

［問題］

$3^4 * 7^2$ の式に出る数字を順に書けば 3472 となるが，勿論この計算の答ではない．しかし，ある累乗数の積が偶然にも，この式に出る数字を順に並べた 4 桁の数となる場合，この数を累乗再現数という．このような数はあるのだろうか.

［解］

```
math141=: 3 : 0
('p';'q')=.y.
while. p<:q
do.
```

```
  ('c0';'c1';'c2';'c3')=.(4#10)#:p
  if. ((c0^c1)*c2^c3)=p do. wr c0,c1,c2,c3,p end.
  p=.p+1
end.
''
)

math141 1000 9999
2 5 9 2 2592
```

[検算]

```
(2^5)*9^2
2592
```

14　不滅の数字

［問題］

ある数がある．それからそのひっくり返した数を引いても，出てきた答はもとの数と同じ数字で構成されている．もっとも，各数字の順序の順序は変わっている．たとえば次の引き算を見ていただきたい．このような数は４桁数にあるだろうか.

```
  9 5 4
- 4 5 9
-------
  4 9 5
```

[解]

```
math144=: 3 : 0
('p';'q')=.y.
while. p<:q
do.
  ('a0';'a1';'a2';'a3')=.(4#10)#:p
  if. a3=0 do. goto_1. end.
  a4=.a0,a1,a2,a3
  if. (#~.a4)<#a4 do. goto_1. end.
  a5=.10#.|.a4
  a6=.p-a5
  if. a6<0 do. goto_1. end.
  ('a7';'a8';'a9';'a10')=.(4#10)#:a6
  a12=.10#.a11/:a11=.a7,a8,a9,a10
  a13=.10#.a4/:a4
```

```
    if. a12=a13 do. wr p,a5,a6 end.
    label_1. p=.p+1
  end.
  ''
  )

  math144 1000 9999
2961 1692 1269
5823 3285 2538
7641 1467 6174
9108 8019 1089
```

参考資料

(1) 木田祐司：UBASIC によるコンピュータ整数論，p.12，日本評論社，1997

(2) 木田祐司：UBASIC によるコンピュータ整数論，p.167，日本評論社，1997

(3) 何森　仁：パソコンで楽しむ高校数学，p.19，サイエンス社，1991

(4) O・オア：整数論（SMSG 新数学双書-12），p.111，河出書房新社

(5) 上野富美夫：数学パズル事典，p.39，東京堂出版，2000

(6) Ｊ．デグレージア：数のパズルはおもしろい，p.124，白揚社，1999