数式ギャラリー (2) 超幾何級数とその周辺

SHIMURA Masato

2017 年 3 月 11 日

目次

1 ガンマ関数と超幾何級数

特殊関数の一つである Γ 関数を辿っていたら、超幾何級数にたどり着いた。J には超幾何級数はプリミティブ（H.) として入っている。これは、*K.E.Iverson* が *Graham,Knuth, Patashnik[Concrete Mathematics]* をスクリプトを作って解説した *[Concrete Mathematics Comparison]* を著したときに組み込まれた。直ぐ後に *E.Mcdnald* が *H.* を用いた誤差関数 *erf* を作成し、ブラック · ショールズモデルのスクリプトを発表したときに、じっくりと鑑賞した。

1.1 JAPLA に上がっている超幾何関数の文献

1. *JAPLA* のワークショップに次のような超幾何関数に関する文献が上がっている。
   (*a*) 西川利男「超幾何関数と *J* コード解析とその利用」*JAPLA Feb./2010*
   (*b*) 竹内寿一郎「超幾何関数の周辺ーその（１）　*JAPLA*　*Apr./2010*
   (*c*) 竹内寿一郎「超幾何関数の周辺ーその（2）　*JAPLA*　*May/2010*
   (*d*) 西川利男「超幾何関数 *(HyperGeometrics)* と *J* のプログラム—誤差関数、正規分布関数、累積密度関数を目指して」*JAPLA Aug./2016*

   (a)(d) は *J* の難解な *Vocablary* や *WIKI* の解説を自作のスクリプトも混じえて分かりやすく再構成し、*(d)* では *Kummer* 型の超幾何級数にも触れている。
   (b)(c) は超幾何関数の総合的な解説である。

2. *Abramowitz and Stegun [Handbook of Mathematical Functions]*
   数値計算のバイブルであり、最近は *HTML* 版が公開されており、*Ch.15* が超幾何級数である。一冊丸ごと *DL* できる。
   http://people.math.sfu.ca/ cbm/aands/
3. *Wolfram Math World: Hypergeometric Function* に超幾何級数の包括的な解説とオイラーから最近までの色々な著書からの *76* の式と幾つかの計算例が載っており、この中には *Abramowits* と *Stegun* の成果も紹介されている。
4. *Knuth* たちの *Concrete Mathematics* に離散数学として超幾何級数が詳しく紹介されている。この中に超幾何級数の導出方法が紹介されている。

1.2　2 項分布と超幾何級数

一石　賢「道具としての統計解析」で、次の問いを非復元抽出の超幾何級数として次の例と解を与えている。超幾何級数はガンマ関数でも表すことができる。しかし、超幾何級数のスクリプトは多様なコーディングがなされている。

10000 個のロットの中に *3%* の割合で不良品が入っているとき、あるロットから *10* 個の検体を取り出して、その中に一個の不良品が含まれている確率は？

$$H_{10000,10000\times\frac{3}{100},10}(1) \simeq B_{10,\frac{3}{100}}(1) = {}_{10}C_1\left(\frac{3}{100}\right)^1\left(\frac{97}{100}\right)^9 \simeq 0.2281$$

1. 2 項分布

$${}_rC_k p^k q^{r-k}$$

```
   (1!10) ,3r100  ,^&9 [97r100
10 0.03 0.760231
   */  (1!10) ,3r100  ,^&9 [97r100
0.228069
```

2. β 分布
- β 関数は Γ 関数を用いて計算できる

$$xBy = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$B(3,5) = \frac{\Gamma(3),\Gamma(5)}{\Gamma(8)} = \frac{2!4!}{7!} = \frac{1}{105}$$

```
gamma=:!&<:!
   x: ((gamma 3)*gamma 5)%gamma 8
1r105

   x: (*/! <: 3 5 ) % ! <: 8
1r105
```

- *J* の *WIKI* の *Essay BetaFunction* にある解説とスクリプト

```
beta=: ] %@* [ !&<: +
```

```
   x:  3 beta 5
1r105
```

- `beta=: ] %@* [ !&<: +` はガンマ関数を用いたフォークの巧妙なスクリプト

```
    3 !&<: 8
21
   x:   5 %@* 21
1r105
```

3. この例題は手強く、手持ちのベ-タや超幾何級数のスクリプトで正解にたどり着けていない。

2　超幾何級数

超幾何級数にはオイラー、ガウス、フックス、リーマンやクンマーが大きくかかわっている。
詳細な解説は先の文献に詳しいので、ここでは超幾何級数に触れて、その効用を確認してみたい。

- 多くの重要な関数が超幾何級数の特別な場合として、現れる。
- ガウスの超幾何微分方程式と言われる超幾何級数で表される分野がある。
- アベールやガロアとは別の岩場上りの道として、クラインによる超幾何級数を用いた *5* 次多項式の解法の証明がある。

先の文献にも一部触れられているが、ここでは超幾何級数に触れて、その効用を確認してみたい。

2.1　超幾何級数

$$F(a,b,c,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}z^n$$

x^n は「ポッホハマー記号」$(a)_n,(b)_n,\cdots$

$$(x)_n=\Pi_{k=0}^{n-1}(x+k)$$

$$(3)_4=(3+0)(3+1)(3+2)(3+3)=3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$$

$a=1,b=1,c=4$ とすると

$$F(1,1,4,z)=\frac{1\cdot 1}{1\cdot 1}z^0+\frac{1\cdot 1}{4\cdot 1!}z^1+\frac{(1\cdot 2)(1\cdot 2)}{(4\cdot 5)\cdot 2!}z^2+\frac{(1\cdot 2\cdot 3)(1\cdot 2\cdot 3)}{(4\cdot 5\cdot 6)\cdot 3!}z^3+\cdots$$

$$= 1 + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{10} + \frac{z^3}{20} + \cdots$$

「ガウスの超幾何定理」

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

$$Re(a) + Re(b) < Re(c)$$

$$C \ni Z \backslash N$$

a,b,c が整数の場合は次となる

$$F(a, b, c, 1) = \frac{(c-1)! \cdot (c-a-b-1)!}{(c-a-1)! \cdot (c-b-1)!}$$

$$a + b < c : \qquad c > 0$$

2.2 徐行運転

（a）e^n

```
    (1 H. 1) i.6
1 2.71828 7.38906 20.0855 54.5982 148.413
    ^ i.6
1 2.71828 7.38906 20.0855 54.5982 148.413
```

テーラー展開

```
     x: ^ t. i.6  NB. Taylor Expantion
1 1 1r2 1r6 1r24 1r120
```

（b）$F(1, 1, 4, z)$

1.5=3r2 であるが、級数計算では微細な差異が出る

```
    F 1; 1; 4 ;1
1.5
   x:  F 1; 1; 4 ;1
44484389839r29656259893
```

$${}_2F_1 F(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{27}{32}) = \frac{8}{5}$$

```
   x:   F 1r3;2r3;5r6;27r32
8r5

   (1r3 ,2r3) H. 5r6 ,27r32
1.6
```

2.3 西川の超幾何級数のスクリプト

JAPLA 2016/09 に上がっている、西川のスクリプトを *J805* でも使えるように微修正した。

(*a*) ガウス型の超幾何級数 *Fn*

Fn は *J* の *H.* を用いないで、最初からコーディングされている。ここで用いられている ***F*** は物理学者フックにちなむ。

Nishikawa

```
   (1 1 2) Fn 0.5
1.38613
```

J の *F*

```
   F 1 1 2 0.5
1.38629
```

(*b*) クンマーの簡易型 $_1F_1(a;b;z)$ は合流型と呼ばれる

J H.

```
   1 H. 1.5;0.5
1.41069
```

Nishikawa

```
   1 1.5 Mn 0.5
1.41069
```

```
   (1 H. 1.5) 0.5
1.41069
```

(*c*) クンマー型は *Wolframn* に *24* の式が紹介されている。クンマー型を用いて誤差関数が定義できる

```
   , Merf("0)  0.5 1 1.5
0.5205 0.842701 0.96605
```

```
   erf 0.5 1 1.5
0.5205 0.842701 0.966105
```

(*d*) 西川の累積分布関数と *J* の誤差関数 *erf* の比較

```
a=. _2 _1.5 _1 _0.5 0 0.5 1 1.5 2

   ( CumNormf("0)  a) ,. ,. n01cdf a
0.0227601 0.0227501
0.0668073 0.0668072
 0.158655  0.158655
 0.308538  0.308538
```

```
       0.5       0.5
  0.691462  0.691462
  0.841345  0.841345
  0.933193  0.933193
   0.97724   0.97725

 Nishikawa   n01cdf
```

3 超幾何級数の応用

私は物理方面には詳しくないので、経済面で主として *erf* 関数の応用例を紹介しよう。

3.1 エレガントな B-S Model by E.McDonnell

Eugene McDonnell によるエレガントなブラック · ショウルズのスクリプト
次の *5* のパラメータを用いる。
S - the current price of the asset
X - the strike price (price when option is to be exercised)
T - the time in years
r - the risk-free interest rate

```
BS =: monad define
'S X T r v' =. y.
-/(S,X*^-r*T)*N((^.S%X)+T*r(+,-)-:*:v)%v*%:T
)
```

```
erf=:(*&(%:4p_1) % ^@:*:) * [: 1 H. 1.5 *: NB. Ewart Shaw Vector 18.4
cnd =:N=: [: -: 1: + [: erf %&(%:2)   NB. CDF of N(0,1)


call:

   bs 60 65 3 30 8
2.13337

put:
   bs 60 65 3 _30 8
_5.84628
```

3.2　プロビット

C.Bliss(1899-1979) が *1934* 年に提唱した回帰分析の手法。対数を用いたロジットと対比される。
階層別の効用のパーセントデータを用いて、
$\Phi(z)$

$$probit(p) = \Phi^{-1}(p) = \sqrt{2}erf^{-1}(2p-1) = -\sqrt{2}erfc^{-1}(2p)$$

erf の逆関数を求めればあとは一本道のようだ。*erfc,erfinv* は *J* の *addon* に入っている。
verbatim require jpath ' addons/stats/distribs/normal.ijs'

```
NB. erf v error function
NB. ref Abramovitz and Stegum 7.1.21 (right)
erf=: (*&(%:4p_1)%^@:*:)*[:1 H. 1.5*:

NB. erfc v complementary error function
erfc=: >:@-@erf

NB. erfinv v inverse of error function
erfinv =: (0,%%:2) qnorm 0.5 + -:

find_rate=:   (%/)@(2 1 &{) "1
probit=:(%:@2:) * erfinv_pdistribs_@<:@+:
NB. probit@find_rate D0
reg_probit=: probit@find_rate %. 1&,.@{."1
estim_probit=: 3 :  '(reg_probit y)&p. {."1 y'
probit_main=:  pnormh_pdistribs_@estim_probit
```

4　References

Graham/Knuth/Patashnik:[Concrete Mathematics(1989)] 有澤他訳　共立出版　*1993*
一石賢　「道具としての統計解析」日本実業出版社　*2004*