数式ギャラリー (1) ガンマ関数とその周辺の曲線

SHIMURA Masato

2017 年 1 月 19 日

目次

1　階乗とガンマ関数

階乗は WikiPedia によると 12 世紀のインドでは知られていたようで、!を用いた表現は 1808 年 フランス、ストラスブール大学の薬学、化学、数学者の Christian Kramp に依る。

1.1　階乗

J 言語の階乗 (!) の定義を確認しよう。J の階乗定義は小数や複素数に拡大されている。

整数の階乗

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$$

```
   ! >:i.5
1 2 6 24 120
```

階乗の素数は 2 のみになる。

1.2　ガンマ関数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

$$n! = \Gamma(n+1)$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

オイラーの定義式　　ガンマ関数はオイラーやガウスに由来する

$$\Gamma(z) = lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{\Pi_{k=0}^{n}(z+k)}$$

ガウスの定義　負でない実数 z に対して

$$\Pi(z) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt$$

$$\Pi(z) = \Gamma(n+1)$$

J の階乗とガンマ関数　.

J のガンマ関数は`!@<:`で

!（階乗）はガンマ関数用に小数、複素数にまで拡張されている

```
!@<: >: i.5
```

1 1 2 6 24

```
!@<: i:5
__ _ __ _ __ _ 1 1 2 6 24
```

Grammar

1) i: マイナス側まで順序数を打ち出す

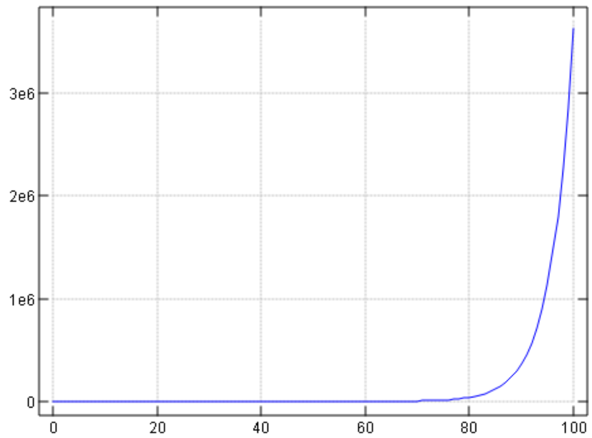
i:5 `_5 _4 _3 _2 _1 0 1 2 3 4 5`

2) !@¡: ガンマ関数

小数のガンマ関数　MATLAB の WIKI の例題と参照した

```
   !@<: _11r3 _7r5 _1r2 1r3 1 4
0.246584 2.65927 _3.54491 2.67894 1 6
```

```
 plot !@<: >: steps 0 10 100
```



ガンマ関数のグラフ　.

1. 数のカーペットを作る　;(link) {(Calalogue) の組み合わせが肝要

   ```
   mk_mat=: |.@{@(;/~)
   mk_cmat=: 3 : ' j./ L:0 mk_mat y'   NB. for complex number
   ```

   ```
      mk_mat  i:2
   +-----+-----+----+----+-----+
   |2 _2 |2 _1 |2 0 |2 1 |2 2 |
   +-----+-----+----+----+-----+
   |1 _2 |1 _1 |1 0 |1 1 |1 2 |
   +-----+-----+----+----+-----+
   |0 _2 |0 _1 |0 0 |0 1 |0 2 |
   +-----+-----+----+----+-----+
   |_1 _2|_1 _1|_1 0|_1 1|_1 2|
   +-----+-----+----+----+-----+
   |_2 _2|_2 _1|_2 0|_2 1|_2 2|
   +-----+-----+----+----+-----+
   ```

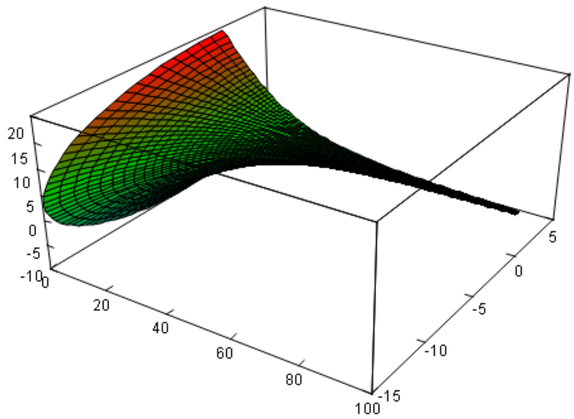
   2 元数である複素数のカーペット

   ```
      mk_cmat  i:2
   +-----+-----+--+----+-----+
   |2j_2 |2j_1 |2 |2j1 |2j2 |
   +-----+-----+--+----+-----+
   |1j_2 |1j_1 |1 |1j1 |1j2 |
   +-----+-----+--+----+-----+
   |0j_2 |0j_1 |0 |0j1 |0j2 |
   +-----+-----+--+----+-----+
   |_1j_2|_1j_1|_1|_1j1|_1j2|
   +-----+-----+--+----+-----+
   |_2j_2|_2j_1|_2|_2j1|_2j2|
   +-----+-----+--+----+-----+
   ```

2. 複素数とガンマ関数

   0 の周辺では発散する。領域によって図形が著しく変化するおぞましい関数であるが、グラフィックスでその姿が垣間見られる。

```
’ surface’ plot >!@<: L:0 |."1 mk_cmat a=.steps 1 5 100
```



2　ベータ関数

WikiPedia にはルジャンドルの定義にしたがって第 1 種オイラー積分と呼ばれる特殊関数と紹介されている。

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

jsoftware.com の *ShowCase Essay* にある *Beta function* のベータ関数のスクリプト

```
beta=: ] %@* [ !&<: +
```

ベータ関数はガンマ関数で構成できる

$$\Gamma x = !x - 1$$

$$x!y = \frac{!y}{(!x) * !y - x}$$

$$xBetay = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$\frac{(!x-1) * !y - 1}{!x + y - 1}$$

ベータ関数の J の定義の経過は *jsoftware.com/Showcase/Essay/Beta distribution* に詳しく述べられている。

これを手計算すると馴染める

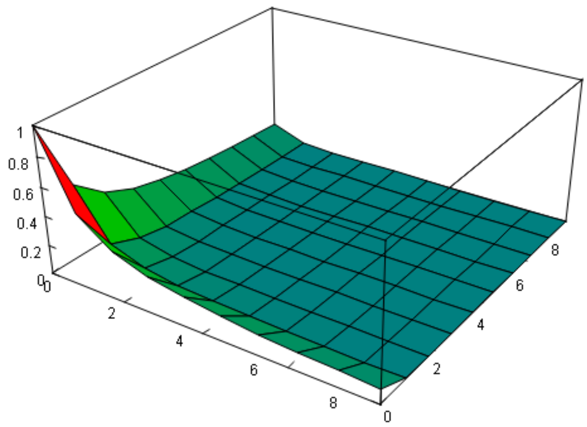
$$B(3,5) = \frac{\Gamma(3),\Gamma(5)}{\Gamma(8)} = \frac{2!4!}{7!} = \frac{1}{105}$$

```
   x: ((gamma 3)*gamma 5)%gamma 8
1r105
```

```
   'surface' plot  beta"0/~ >: i.20x
```

更に簡略にでき、見晴らしがよくなる

```
  'surface'  plot  (%@*  !&<: +)"0 /~ >:i.10x
```



これを手計算するとベータ関数にもっと馴染める

$$B(3,5) = \frac{\Gamma(3),\Gamma(5)}{\Gamma(8)} = \frac{2!4!}{7!} = \frac{1}{105}$$

```
   x: ((gamma 3)*gamma 5)%gamma 8
1r105
```


3 chi, F, t 関数の三つ子

特殊関数のガンマ関数やベータ関数はこの領域で活躍する。この *3* つの関数はアプリオリに与式が与えられるが、式の導出過程は探してもなかなか見当たらない。

Chi square .

$$C^2 = \frac{(x-np)^2}{np} + \frac{(n-x-n(1-p))^2}{n(1-p)} = \left(\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)^2$$

F .

$$f(m,n)x = \begin{cases} \dfrac{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)} \cdot \quad \dfrac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}} & (x > 0) \\ \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

t .

$$f_n x = \frac{1}{\sqrt{n} B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{n}{2}\right)} \quad \left(1+\frac{x^2}{n}\right) \quad = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+2}{n}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

jsoftware.com の *Wiki ShowCase Essay* に入っている *cdf(*累積分布曲線*)* かって、*J* は *erf* 関数などのため超幾何関数（*H.*）を作った。

- *normal distribution*

```
NB. ******************************
NB. Normal CDF
erf   =: (1 H. 1.5)@*: * 2p_0.5&* % ^@:*:
n01cdf=: -: @ >: @ erf @ %&(%:2)gamma  =: ! & <:
```

- カイ自乗

$$F(x;k) = \frac{\gamma\left(\frac{k}{2},\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$$

γ はルジャンドル由来の不完全ガンマ関数で、*0* 点で *2* 分割して積分する。

```
NB. Chi-square
gamma=:!&<:!
ig0     =: 4 : '(1 H. (1+x) % x&((* ^) * (^ -)~)) y'
incgam  =: ig0 % gamma@[  NB. incomplete gamma
chisqcdf=: incgam&-:
```

- *t* 分布
  ギネスビールの数学者でエンジニアであったゴセットが *1908* 年に名を伏せて発表し、フイッシャーが重要性を認めて広め、*Student* の *t* 分布と呼ばれた。ギネス社が知ったのはゴセットの死後、遺稿の出版への寄付を求められた時
  次の累積分布関数の *Script*

$$\frac{1}{2}+x\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)*\frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{n+1}{2};\frac{3}{2};-\frac{x^2}{n}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

```
NB. t-distribution CDF
tcdf=: 4 : 0
 assert. (%:x)>|y
0.5+y*(!-:x-1)*((0.5,-:1+x)H. 1.5 x%~-*:y)%(%:o.x)*!<:-:x
)
```

自由度を指定し、特定のパーセント点での下側累積確率 *(*左端からの累積確率）を求める

```
   5 tcdf 2.01505 1.47588
0.95 0.899999
```

自由度 *5* で*,t* 値 *x=2.10505* での累積確率は *0.95*（*t* の表では *0.10* のポイント）
累積確率は *x=0* での値は *0.5* である
plot 12 tcdf steps 0 3 100

4 Script

```
NB. *****************************
NB. Normal CDF
erf   =: (1 H. 1.5)@*: * 2p_0.5&* % ^@:*:
n01cdf=: -: @ >: @ erf @ %&(%:2)gamma  =: ! & <:

NB. Chi-square
gamma=:!&<:!
ig0     =: 4 : '(1 H. (1+x) % x&((* ^) * (^ -)~)) y'
incgam  =: ig0 % gamma@[  NB. incomplete gamma
chisqcdf=: incgam&-:

NB. in J Schowcase  Essay
NB. t-distribution CDF
tcdf=: 4 : 0
 assert. (%:x)>|y
 0.5 + y * (!-:x-1) * ((0.5,-:1+x) H. 1.5 x%~-*:y) % (%:o.x) * !<:
)
NB. Usage:   5 tcdf 2.01505 1.47588
NB. 0.95 0.899999
```

```
NB. Suzuki normal distribution
ndens=: 3 : '(^--:*:y)%%:o.2'
nden=: 4 : '(ndens(y-{.x)%s)%s=. %:{:x'

mean=: +/ % #
chigf=: 3 : '(+/ *: y - e0 ) % e0=. mean y'
NB. Usage:   chigf 12 8 10 13 8 9
```

5　References

Jsoftware.com/Showcase/Essay 内の各関数の紹介と *Script* の定義
一石賢　「道具としての統計解析」日本実業出版社　*2004*
鈴木義一郎「*J* 言語による統計解析」森北出版　*1996*
鈴木義一郎「統計分析へのいざない」　マーケティングサイエンス研究所　*1998*