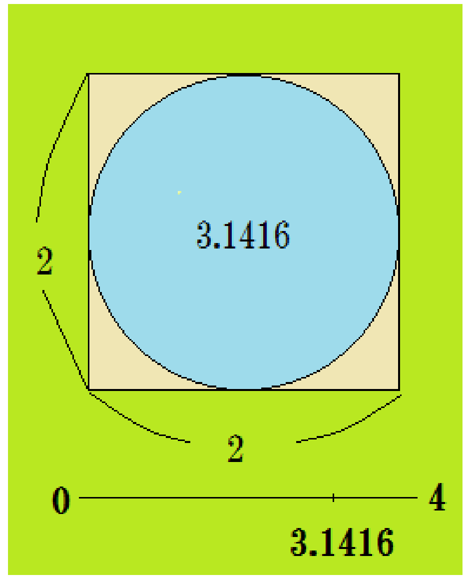
χ^2 モデル

山本　洋一

χ 自乗と２項分布と　Ｚ値のつながりを調べてみたいと思います。

まずは、モデルから…

例 1.3400、0.0152、2.9289、1.4213
…　…　…　…
データ　100 まで　右下図参照。



０～４まで　点、3,1416　両側で…
図のように、乱数を、**100 点**ほど取り、 **２群**に分けるということです。

丸内０～**3.1416** の内側の面積と、円の外と四角と間の部分に分けます。

データ結果は

A 円内　は、0～3.1416　まで　81
B 円外　は　3.1416～4　まで　19
合計　100

理論値は、　A 円内　78.54　　100×π÷４
B 円外　21.46　　100(1－π÷４)
合計　100

標準偏差を算出しないで、χ 自乗算出

それではここで、自由度１　の　χ^2 算出します。

公式は

χ^2＝ (A データ－A 理論値)^2 /A 理論値
＋(B データ－B 理論値)^2 /B 理論値

$=(78.54-81)^2/78.54+(21.46-19)^2/21.46$
$=0.3590$

5%有意で、3.841

有意とはいえない

1.3400	0.1025	2.9289	1.4213
3.5080	2.1679	1.0954	3.3100
2.9876	3.3431	2.9300	3.0376
0.5997	0.8789	3.9432	2.6018
0.4822	1.3322	0.8672	0.9315
2.3107	3.7296	3.7795	2.1566
3.2845	0.4152	0.1038	0.2178
1.5129	2.9779	1.9931	0.4479
0.4138	0.7729	0.5040	0.7545
3.0479	3.1615	3.1540	2.9066
1.8708	3.3230	2.9052	0.3262
3.1073	3.5889	2.4202	0.7044
3.6954	0.0870	1.3219	0.5246
3.7927	2.1380	2.5152	0.5420
2.0323	3.6236	0.6383	2.8433
2.8639	0.1487	1.9463	3.5492
1.0192	2.3533	3.6719	3.1648
1.6574	1.0721	2.5483	1.4679
2.9450	0.7707	2.3146	0.9192
0.0726	3.1170	0.2899	3.5566
1.4473	3.1302	3.4685	1.2361
2.8748	0.8882	3.0680	0.5863
0.0260	0.7442	2.1796	2.8828
0.8538	1.4557	1.4411	1.4473
1.3438	0.9962	2.2676	2.2008

標準偏差を使用し、Z 値を算出し、Z自乗の値から…

別解(1)　　$p+q=1$ より　$p=\pi/4$　$q=1-\pi/4$　とします。

A 理論値　78.54　からの　z 値算出。

標準偏差は、2 項分布のものを使用。

$\sigma=\sqrt{(npq)}$　$n=100$　$p=\pi/4$　$q=1-\pi/4$

$=\sqrt{\{(100\times0.7854\times(1-0.7854))}$

$=4.1054457$

A より…

$z=(78.54-81)\ /\ 4.1054457=-0.5992041$

$z^2\ =3.590$

別解(2)

B 理論値　21.46　からの　z 値算出。

$\sigma=\sqrt{\{(100\times0.2146\times(1-0.2146))}$

$=4.1054457$

B より

$z=(21.46-19)\ /\ 4.1054457=0.5992041$

$z^2=0.3590$

A、B　　$z^2=0.3590$ に注目してください。$\chi^2\ =0.3590$　と全く数字が同じであります。

自由度１ $\chi^2\ \Rightarrow\ z^2$

2 項分布の　2 項分布の標偏差準 **σ と z 値**を利用し z^2　を算出して自由度１の χ^2 として使用することができます。

上記三つ値が、同じになる証明

$\chi^2=(A-np)^2/np+(B-nq)^2/nq$

ここで　$(A-np)^2=(B-nq)^2$　A も B も　理論値から等距離にあるため。(1)

$\therefore\chi^2=(A-np)^2/np+(A-np)^2/nq$

$=\{np(A-np)^2+nq(A-np)^2\}/n^2pq$

$=n(p+q)(A-np)^2/n^2pq$

ここで $q+p=1$

$\therefore\chi^2=(A-np)^2/npq$　　**(1)より**　$\chi^2=(B-nq)^2/npq$

ここで　$\sigma=\sqrt{(npq)}$　$z=(A-np)/\sigma$　$z=(A-np)/\sqrt{(npq)}$

$\therefore\ z^2=(A-np)^2/\{\sqrt{(npq)}\}^2$

$\therefore\ z^2=(A-np)^2/npq$　　**(1)より**　$z^2=(B-nq)^2/npq$

∴　自由度１ $\chi^2\ \Rightarrow\ z^2$

参照　公式引用は、鈴木義一郎著　現在統計学小事典
石川幹人著、体感する統計解析