

加平均と相乗平均

山本 洋一



相加平均 \geq 相乗平均 の証明

二項目の証明から

...

2項目から、 $(x_1+x_2)/2 \geq \sqrt{x_1 \times x_2}$ は、 $a = x_1 + x_2$ とし、

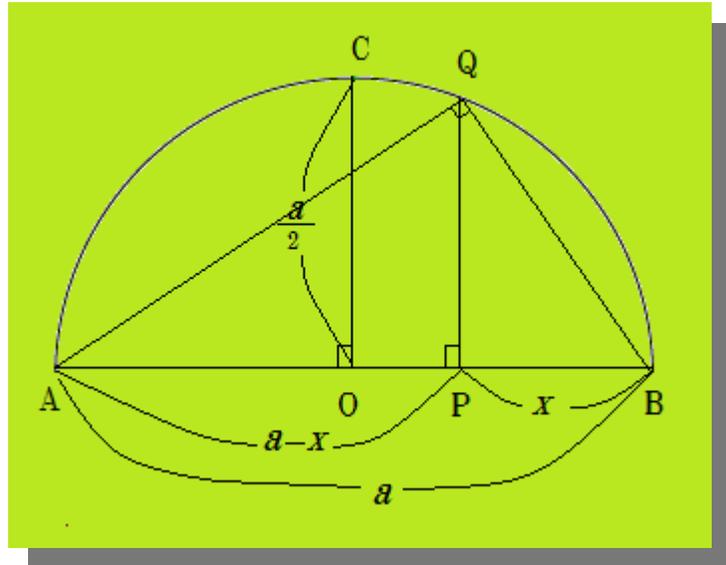
上記 $x_1 = x$ $x_2 = a - x$ に置き換えます。

$$(a - x)/2 \geq \sqrt{x \times (a - x)}$$

で証明します。

ユークリッドの線分に関する証明

から... $a=AB$ とします。



与えられた線分 AB を点 P で分割したときに、線分の長さの積 $AP \times PB$ が最大になるのは、

P が AB の中点 O と P が重なるときです。図を参照

比率で $\triangle AQP \sim \triangle QBP \Rightarrow$

$\triangle AQP$ と $\triangle QBP$ とは相似形。

$$\therefore x : PQ = PQ : (a - x)$$

$$PQ^2 = x(a - x) \quad PQ = \sqrt{x(a - x)}$$

$$AO = OB = CO \quad a - x = x \Rightarrow a/2 \text{ で最大。}$$

$a/2$ は AB の端点から中点 O までの距離。

$\therefore x_1$ と x_2 の場合は $x_1 = x_2$ で最大になります。相加平均 \geq 相乗平均 ということがいえます。

$a/2$ を相加平均とすれば...相加平均は、 $a/2$ で、一定。

相乗平均の最大は、 $\sqrt{(a/2)^2} = a/2$

次の図形の証明は、2項目の別解です。

上記より別の図形…

中抜き正方形

中抜き正方形 ABCD の面積は、

$$x(a - x) \times 4 = AP \times PB \times 4$$

ここで x と $a - x$ の平均は…

$$\{x + (a - x)\} / 2$$

上記の面積を最大にするには、P点を 中点 Oまで

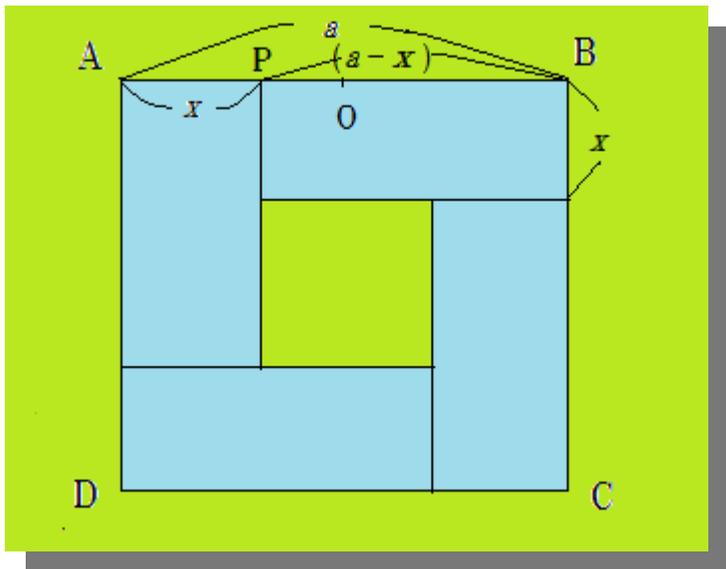
延長しますと、中抜き部分は、なくなります。

$AP \times PB$ は 最大となります。 AB の中点です。

最大の場合 $a/2$

または、 $x_1, x_2 \dots$ は、 $x_1 = x_2$ である。

$$a^2 \geq 4(a - x)x$$



$$\Leftrightarrow a \geq 2\sqrt{\{(a - x)x\}}$$

$$\Leftrightarrow a/2 \geq \sqrt{\{(a - x)x\}}$$

ここで

$$x=a/2 \Rightarrow \sqrt{(a/2)^2} = a/2 \text{ で}$$

相乗平均は最大。

$$\therefore (x_1 + x_2) / 2 \geq \sqrt{(x_1 x_2)} \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + x_2)^2 / 4 \geq (x_1 x_2)$$

続く… 2項目別解 微分による… $x_1, x_2 > 0$

x_1 と x_2 は $a = x_1 + x_2$ とし同様 x と $(a - x)$ にします。積を y とします。

$$y = x(a - x) \Leftrightarrow y = ax - x^2 \Leftrightarrow y = -x^2 + ax$$

(1)

$y = -x^2 + ax$ を微分します。

$$dy/dx = -2x + a$$

$$dy/dx = 0 \text{ で極大・極小 } 0 = -2x + a \Rightarrow x = a/2$$

$x = a/2$ で、 y は最大または最少。

凹凸判定。

$dy/dx = -2x + a$ もう一度微分します。

$$d^2y/dx^2 = -2 \quad (\text{負}) \text{ 上に凸。} \quad \therefore x = a/2 \text{ は、最大。}$$

$x_1, x_2 \dots$ は、正で、

(1)

$$\text{に代入 } y = a^2/4 \Rightarrow \text{相乗平均} \sqrt{y} = \sqrt{a^2/4} = a/2$$

最大で相加平均と一致します。

$$(x_1 + x_2)/2 \geq \sqrt{x_1 x_2} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2/4 \geq x_1 x_2$$

x_1, x_2, x_3 3項目の場合の証明。

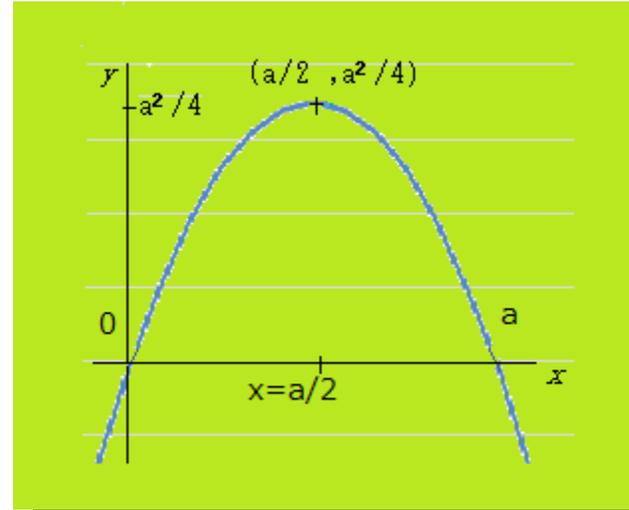
微分による...

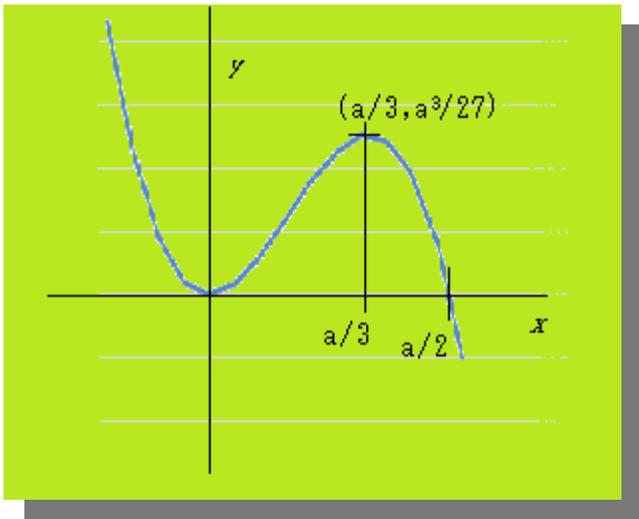
2項目の証明より、 x_1, x_2 は、 $x_1 = x_2$ が、二項目で証明されているので $a = x_1 + x_2 + x_3$ として、

$x, x, (a - 2x)$ の3項目で証明します。

a は、定数。

$$y = (a - 2x)x^2 \Leftrightarrow y = ax^2 - 2x^3 \Leftrightarrow y = -2x^3 + ax^2 \quad \text{————— (2)}$$





微分します。

$$dy/dx = -6x^2 + 2ax$$

$$dy/dx = -2x(3x + a)$$

$dy/dx = 0$ と置き、ここで 極大極小 判定。

$$0 = -2x(3x - a) \Rightarrow \text{解 } x=0 \text{ or } x=a/3$$

極大、局小は 2か所。

左 図参照 $dy/dx = -6x^2 + 2ax$

をもう一回微分します。 $d^2y/dx^2 = -12x + 2a$

ここで、 $d^2y/dx^2 = 0$ で、凹凸は…

極大、局小は 上記 $0 = -12x + 2a$ で判定。

上記解 $x=0$ or $x=a/3$ より

$x=0$ の場合 $d^2y/dx^2 = 2a$ (正) で下に凸。

$x=a/3$ の場合 $d^2y/dx^2 = -2a$ (負) で上に凸。

極大 $x \geq 0$ で $x=a/3$ は、最大。

(2) 式に、代入 $y = a^3/27$ 図参照 $\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{a^3/27} = a/3$

3項目は… $x_1 x_2 x_3 > 0$

相加平均 \geq 相乗平均

$(x_1 + x_2 + x_3)/3 \geq \sqrt[3]{(x_1 x_2 x_3)}$ 相乗平均は、 $x_1 = x_2 = x_3$ で最大になり、相加平均に等しくなります。

最大 $x = a/3 \because x_i > 0, a > 0$

4項目以上は… $x_1 x_2 x_3 x_4 \dots$

$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \dots) / 4 \geq \sqrt[4]{(x_1 x_2 x_3 x_4 \dots)}$ 3項までは、3項目は、証明済みなので、

$x = x_1 = x_2 = x_3$ 、 $a = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ として、4項目は、 $x_4 = a - 3x$ に置き換えます。

$x_1 x_2 x_3 x_4$ の積は $(a - 3x)x^3$ に置き換えます。

$$y = (a - 3x)x^3 \Leftrightarrow y = ax^3 - 3x^4 \quad dy/dx \text{ と } d^2y/dx^2 \text{ を算出} \quad \text{最大 } x=a/4 \quad \because a>0$$

5項目は、4項目証明済みから

$$y = (a - 4x)x^4 \Leftrightarrow y = ax^4 - 4x^5 \quad dy/dx \text{ と } d^2y/dx^2 \text{ を算出} \quad \text{最大 } x=a/5 \quad \because a>0$$

同様に項目を増やしますと…

$$y = (a - 5x)x^5 \Leftrightarrow y = ax^5 - 5x^6 \quad dy/dx \text{ と } d^2y/dx^2 \text{ を算出} \quad \text{最大 } x=a/6$$

$\because a>0$

… … …

参照と引用文献

川田直樹著 高校数学体系 定理・公式の例解辞典

ユークリッド線分・分割にかんする定理。

瀬山士郎著 数字と記号を読む辞典 中抜き正方形の図形より。