

ベジエ曲線を 2 行のスク립トで

SHIMURA Masato
JCD02773@nifty.ne.jp

2016 年 12 月 15 日

北斎の新型小紋帖の図案を描いたときに曲線を出すのにベジエ曲線を多用した。
ベジエ曲線はバーンスタイン関数を展開するアルゴリズムであるが、今回はアルゴリズムの理解を深め、マトリクスを多用することで J のスク립トを 2 行で描けるまでに簡潔化した。

1 ベジエ曲線で描く

ベジエ曲線を最初に開発したのはシトロエン社のド・カスティリヨである (1962)。リン
ドバーグが「翼よ..」と叫んだエッフェル塔には当時巨大なシトロエンの文字が輝いてい
た。ピエール・ベジエはルノー社のエンジニアで同じころ独自に開発し、論文を発表した
のでこちらの名が有名になった。

*1

1.1 バーンスタイン関数

- バーンスタイン (Bernstein(1880-1968)) はロシア-ソ連の数学者
- バーンスタイン関数

$$B_i^n = C_i^n t^i (1-t)^{n-i}$$

*1 シトロエンはミシュランを経て今はプジョーグループである

$$\begin{aligned}
B_0^3 &= (1-t)^3 &= -1 + 3t - 3t^2 + t^3 \\
B_1^3 &= 3t(1-t)^2 &= 3t - 6t^2 + 3t^3 \\
B_2^3 &= 3t^2(1-t) &= 3t^2 - 3t^3 \\
B_3^3 &= t^3
\end{aligned}$$

$$P(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(t-1)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3$$

- ベジエ計算用のマトリクス。
バーンスタイン関数をマトリクスにのせる
J の多項式 (p.) の係数は低次の項が左に来るのでこれに合わせて転置している。

```

mat_bezier4
1  0  0  0
_3  3  0  0
3 _6  3  0
_1  3 _3  1

```

2 CASE

- **Example** ベジエ曲線の仕組みを 4 次の単体データで見てみよう。マトリクスに適用するため縦型で 4 点のデータを用いる。上下端は固定点、中間の 2 点がマリオネットのように操る支点である

```

EXG
3 2.5 NB. fix
4.5 1
7 2.5
9 0.5
x y NB. fix

```

- ベジエ曲線は X,Y 共に両端を固定して、中間の 2 点を操り人形のように変化させて目的の曲線を得る。(自動フィットへの最適化は行っておらず、手操作で行う)
- 多項式
ベジエマトリクスに EXG をかけて多項式を作成する

```
{|: mat_bezier4 +/ . * EXG
```

```
+-----+-----+
|3 4.5 3 _1.5|2.5 _4.5 9 _6.5|
+-----+-----+
```

```
3 4.5 5 _1.5&p. NB. X axes
2.5 _4.5 9 _6.5&p. NB. Y axes
```

$$B_x = 3 + 4.5t + 5t^2 - 1.5t^3$$

$$B_y = 2.5 - 4.5t + 9t^2 - 6.5t^3$$

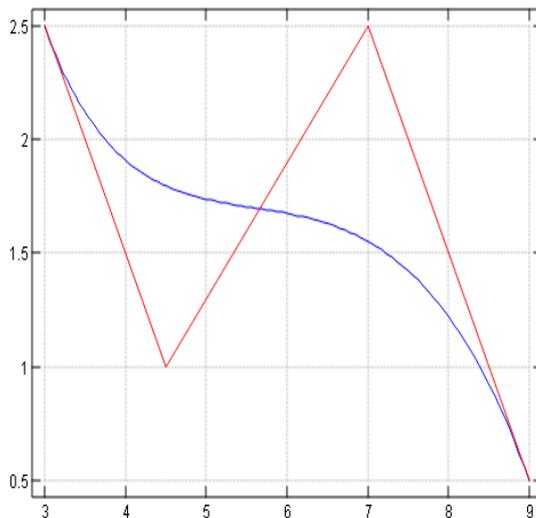
X 軸は両端を固定して中間の二点を細かく配分して算出している

Y でベジエの曲線を抽出する。

ベジエ曲線は最小二乗法のように X,Y 相互の関係は見えない。

- 多項式が得られれば、ポイントを多くとって滑らかにする
- グラフィックスで確認する。

```
0 0 10 5 popup_bezier EXG
plot_bezier EXG
```



• Script

1. Util のロード

```
require 'numeric plot'
```

2. ベジエ曲線は次の 2 行で計算できる

```
mat_bezier4=:1 0 0 0, _3 3 0 0, 3 _6 3 0, _1 3 _3 1 NB. Cubic BesierMatrixFor
calc_bezier=: 3 : '{|: mat_bezier4 +/ . * y)p. L:0 steps 0 1 100 '
```

3. 多項式を見るため、途中を分割すると

```
calc_bezier0=: 3 : '{|: mat_bezier4 +/ . * y' NB. find polynomial
```

```
calc_bezier1=: 3 : '(calc_bezier0 y) p. L:0 steps 0 1 100' NB. bezier lin
```

- Grammar

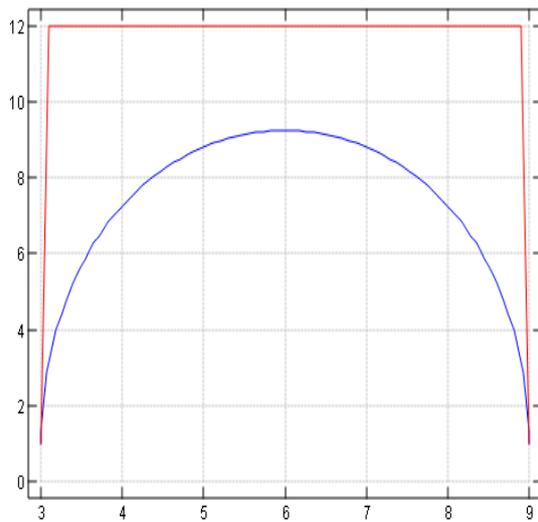
1. +/ . * 内積
2. |: Transpose 転置
3. { Catalogue 分類 2のボックスを作成
4. p. 多項式 $1 _2 _3 _1&p.$ は $f(x) = 1 - 2x + 2x^2 - x^3$
5. L:0 Box で区切られた多項式をループなしで同時計算

3 北斎を描く

新型小紋帖から松並のピースを描く

```
MTNM0=: 3 1,3.1 12,8.9 12,:9 1
```

```
plot_bezier MTNM0
```



```
plot_bezier=: 3 : 0  
pd 'new'  
pd calc_bezier1 y  
pd {|: y  
pd 'show'  
)
```