

## 超幾何関数(Hypergeometric Function)とJプログラム

—誤差関数、正規分布関数、累積密度関数を目指して—

西川 利男

### 1. 超幾何関数とは—その位置づけ

超幾何関数(Hypergeometric Function)という名を聞いたことがあるだろうか。あまりにも高度で、特殊なものと思われるかもしれないが、そんなことはない。ここではJプログラミングの練習課題として、とりあげて見よう。

C. F. Gauss に始まり、その後多くの数学者により、さまざまな展開がなされている。

#### 1. 1 超幾何関数の定義[1][2]

・ Gauss の超幾何関数

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot 2!} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1) \cdot 3!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdot \beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2) \cdot 4!} x^3 + \dots$$

・ 合流形超幾何関数(Kummer の超幾何関数) (後述 4. に)

$$M(\alpha, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma \cdot 2!} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1) \cdot 3!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2) \cdot 4!} x^3 + \dots$$

#### 1. 2 その位置づけ

いろいろな数学の関数がある。あるものは増加したり、また減少したり、あるいはいろいろと変動したり、繰り返し振動したりといろいろである。

まず初等関数と呼ばれる  $x^2, x^3, \sqrt{x}, \ln x, \log x, \sin x, \cos x, \dots$  がある。また、面積を求めたり、微分方程式の解を表すのに積分による関数表示がある。さらに、たとえば楕円の長さなどに関する楕円関数、あるいはベッセル関数などといった特殊関数と呼ばれるものもある。

一方、どんな関数でも係数をいろいろと決めることによりべき乗の多項式の級数の和として表される。そのひとつが Taylor 級数である。さらにその係数をもっと拡張したものはいろいろ多方面に対応できる。それが万能の多項式級数=超幾何関数である。また、これにより数値的取り扱いが可能になるという数値計算の強力な道具になる。

[1] 高木貞治「解析概論」改定第3版 p.188, 岩波書店(1986).

[2] 森口繁一、宇田川銈一、一松信「数学公式Ⅲ」 p.55-81, 岩波書店(1977).

## 2. 超幾何関数の利用例－自然対数の値を求める

自然対数の超幾何関数による表示

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = F(1, 1, 2; -x), \quad \frac{\ln(1-x)}{(-x)} = F(1, 1, 2; x)$$

## 3. 超幾何関数のJプログラム

ここではJではあるが、在来型のループを使ってプログラムを作った。

```
Fn =: 3 : 0
:
n =. 10
'a b c' =. x.
x =. y.
i =. 1
A =. a
B =. b
C =. c
s =. 1
while. i < n
do.
    NB. calc. coefficient =====
NB.   wr (2": i), ':", (3":A), '<', (":*/A), '> *', (3":B), '<',
(":*/B), '> /', (3":C), '<', (":*/C), '>'
    CC =. ((,*/A) * (,*/B)) % (,*/C)
NB.   wr 'CC=', (": CC), ' : ', (": x: CC)
NB.   wr 's=', ":s
    A =. A, (a+i)
    B =. B, (b+i)
    C =. C, (c+i)
    NB. calc. x-value =====
    Xi =. (% ! i) * (x^i)
    sx =. CC * Xi
    s =. s + sx
    i =. i + 1
end.
s
)
```

まずは、超幾何関数のJプログラムFnの途中の計算結果を示しつつ、実行してみる。

(1, 1, 2) Fn 0.5

1: 1<1> \* 1<1> / 2<2>

CC=0.5 : 1r2

s=0

xi=0.5

sx=0.25

2: 1 2<2> \* 1 2<2> / 2 3<6>

CC=0.666667 : 2r3

s=0.25

xi=0.125

sx=0.0833333

3: 1 2 3<6> \* 1 2 3<6> / 2 3 4<24>

CC=1.5 : 3r2

s=0.333333

xi=0.0208333

sx=0.03125

4: 1 2 3 4<24> \* 1 2 3 4<24> / 2 3 4 5<120>

CC=4.8 : 24r5

s=0.364583

xi=0.00260417

sx=0.0125

5: 1 2 3 4 5<120> \* 1 2 3 4 5<120> / 2 3 4 5 6<720>

CC=20 : 20

s=0.377083

xi=0.000260417

sx=0.00520833

(途中省略)

9: 1 2 3 4 5 6 7 8 9<362880> \* 1 2 3 4 5 6 7 8 9<362880> /  
2 3 4 5 6 7 8 9 10<3628800>

CC=36288 : 36288

s=0.385934

xi=5.38229e\_9

sx=0.000195313

1.38613

次は通常のとおり計算結果のみを出力する。そして自然対数の値と比較する。

(1, 1, 2) Fn 0.5 ===== F (1, 1, 2; 0.5) に相当

1.38613

(. (1 - 0.5)) % (\_0.5) === ln (1 - 0.5) % (-0.5)の計算値

1.38629

(1, 1, 2) Fn \_0.5 ===== F (1, 1, 2; -0.5) に相当

0.810869

(. (1 + 0.5)) % 0.5 === ln (1 + 0.5) % (0.5)の計算値

0.81093

このようにして、超幾何関数のプログラムFnにより、自然対数の値が得られる。

#### 4. 合流型超幾何関数のJプログラムとその利用

Gaussの超幾何関数とは、少し違ってKummerの超幾何関数(合流形超幾何関数)というのがある。先のFnを少し手直して、Mnとしてつくった。定義は巻末にあげた。

実は、これを用いることによって、確率・統計などの基本である、誤差関数(Error Function)や正規分布の累積関数(Normal Cummulative Distribution Function)などが作られる。

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt = \frac{2x \exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}} M(1, 1.5; x^2)$$

$$ncd(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt$$

式の詳細は「岩波数学公式Ⅲ」p.57あるいは以下のホームページの記述を参照のこと

Wolfram Mathworld Erf Error Function

Jのプログラムと実行はつぎのようになる。

誤差関数は次のように求められる。

NB. Error Function / T. N version 1 =====

```
Merf =: 3 : 0
```

```
M1 =. (1 1.5) Mn *: y.
```

```
M2 =. ((2 % %: 1p1) * y.) % (^ *: y.)
```

```
M =. M1 * M2
```

```
)
```

```
(1, 1.5) Mn 0.5
```

```
1.41069
```

```
(1, 1.5) Mn 1
```

```
2.03008
```

```
, Merf"(0) 0.5 1 1.5
```

```
0.5205 0.842701 0.96605
```

正規分布の $-\infty$ から各値までの累積値は次のように計算される。

NB. Cumulative Normal Function 0-1 / T.N =====

```
CumNormf =: 3 : 0
```

```
0.5 * 1 + Merf (%: 0.5) * y.
```

```
)
```

```
, CumNormf"(0) _2 _1.5 _1 _0.5 0 0.5 1 1.5 2
```

```
0.0227601 0.0668073 0.158655 0.308538 0.5 0.691462 0.841345 0.933193 0.97724
```

## 5. 終わりに一付記

今回の発表は、JのProgram ManualにH. Hypergeometric Functionとして以下のような記述があるが、tacit形式で副詞、接続詞を用いた、まさにトリッキーなコーディングである。実は、これをフォローしようとしたが、とても一筋縄では行かなかった。

結局、数学の原理に基づき、自分流にExplicitでループを使用して定義し、それにより超幾何関数なるものをやっと理解することが出来た（計算の数値の照合にはおおいに利用したが）というのが本音である。

NB. Hypergeometric Function - J Original Version =====

```
rf=: 1 : '(,x.)"_ ^!.1/ i.@['
```

```
L1=: 2 : 'x.rf %&(*) y.rf'
```

```
L2=: (i.@[ ^^ ]) % (!i.@[]
```

```
H=: L1 (+/ . *) L2
```

```
erf=: 1 H. 1.5@* : * 2p_0.5&* % ^@* :
```

```
n01cdf =: -: @: >: @: erf @: ((%:0.5)&*)
```

## Jプログラムリスト

NB. Hypergeometric Function =====

NB. Gauss Hypergeometric Function

NB. test natural logarithm calc.

NB. (1, 1, 2) Fn \_0.5 for F(1, 1, 2;\_0.5)

NB. 0.810869

NB.

NB. (^.(1 + 0.5)) % 0.5 for ln(1 + 0.5) % (0.5)

NB. 0.81093

NB. (1, 1, 2) Fn 0.5 for F(1, 1, 2;0.5)

NB. 1.38613

NB. (^.(1 - 0.5)) % (\_0.5) for ln(1 - 0.5) % (\_0.5)

NB. 1.38629

Fn =: 3 : 0

:

n =. 10

'a b c' =. x.

x =. y.

i =. 1

A =. a

B =. b

C =. c

s =. 1

while. i < n

do.

NB. calc. coefficient =====

NB. wr (2": i), ':', (3":A), '<', ("\*/A), '> \*', (3":B), '<',  
("\*/B), '> /', (3":C), '<', ("\*/C), '>'

CC =. ((,\*/A) \* (,\*/B)) % (,\*/C)

NB. wr 'CC=', (": CC), ':', (": x: CC)

NB. wr 's=', ":s

A =. A, (a+i)

B =. B, (b+i)

```

C =. C, (c+i)
NB. calc. x-value =====
Xi =. (% ! i) * (x^i)
sx =. CC * Xi
s =. s + sx
i =. i + 1
end.

s
)

NB. Kummer Confluent Hypergeometric Function =====
NB. (1, 1.5) Mn 0.5
NB. 1.41069
NB. (1, 1.5) Mn 1
NB. 2.03008

Mn =: 3 : 0
:
n =. 10
'a c' =. x.
x =. y.
i =. 1
A =. a
B =. 1
C =. c
s =. 1
while. i < n
do.
    NB. calc. coefficient
NB. wr (2": i), ':', (3":A), '<', ("*/A), '> *', (3":B), '<',
("*/B), '> /', (3":C), '<', ("*/C), '>'
    CC =. ((*/A) * (*/B)) % (*/C)
NB. wr 'CC=', (": CC), ':', (": x: CC)
NB. wr 's=', ":s
    A =. A, (a+i)
    B =. B, 1 NB. for Kummer Function

```

```

NB.      B =. B, (b+i)
      C =. C, (c+i)
      NB. calc. x-value
      Xi =. (% ! i) * (x^i)
      sx =. CC * Xi
      s =. s + sx
      i =. i + 1
      end.
s
)

NB. error function =====
adj_erf =: 2p_0.5&* % ^ @: *:

NB. J original =====
f1 =: (1 H. 1.5)@*:
ferf =: f1 * adj_erf
NB.      ferf 0.5 1
NB. 0.5205 0.842701

NB. Nishikawa version 0 =====
m0 =: 3 : '(1, 1.5) Mn (*: y.)'
merf =: m0 * adj_erf
NB.      , merf"(0) 0.5 1
NB. 0.5205 0.842701
NB. Nishikawa version 1 =====
Merf =: 3 : 0
      M1 =. (1 1.5) Mn *: y.
      M2 =. ((2 % %: 1p1) * y.) % (^ *: y.)
      M =. M1 * M2
)

NB. Cumulative Normal Function 0-1 =====
CumNormf =: 3 : 0
0.5 * 1 + Merf (%: 0.5) * y.
)

```