JAPLA 研究会資料　2015/03/13

直交行列の対角化

島田　義弘

直交行列の固有値？

一般に知られている事実の通り、ユニタリー行列の固有値は絶対値が１の複素数です。では、それを実数に制限したものである直交行列は、果たして、どんな固有値をもつのか？具体例を計算してみました。

1　対角化に関する定理

詳しくは線形代数の教科書（『線型代数入門』齋藤正彦著、東京大学出版会、p141, 定理 [2, 4]′）を参照していただきたいのですが、

（定理１）

正方行列 A に対して、$U^{-1}AU$ が対角行列となるようなユニタリー行列 U が存在するには、A が正規行列 $(AA^{\dagger} = A^{\dagger}A)$ であることが必要十分である。

という定理があります。エルミート行列もユニタリー行列も正規行列ですから、どちらもユニタリー行列で対角化できます。エルミート行列のユニタリー行列での対角化はネットにそこらじゅうごろごろしています。この時すべての固有値は実数となります。しかし、ユニタリー行列のユニタリー行列による対角化は、あまり見ません。この時、すべての固有値は絶対値が１の

複素数となります。

では、ユニタリー行列の実数への制限である直交行列は、どんな固有値を持つのでしょうか。

2　具体例その１

一番有名な直交行列 R の対角化は次でしょう。全ての二次の直交行列は次の R の形をしています。これはユニタリー行列 U で対角化できます。

$$
\begin{aligned}
R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \\
U^{-1}RU = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} (= \Lambda)
\end{aligned} \tag{1}
$$

驚くべきは、R は実行列なのに、固有値と固有ベクトルは複素数なのです。実ベクトル $\boldsymbol{d} = (\alpha, \beta)^T$ と R の積は当然実数のベクトルになります。それを確認します。

$$
\begin{aligned}
R\boldsymbol{d} &= UU^{-1}RUU^{-1}\boldsymbol{d} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\left\{ e^{i\theta}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} + e^{-i\theta}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \right\}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2}
$$

途中経過は興味深いですが、最後の結果は当たり前でしたかね。とまあ、この様に表面上は全て実数しか出てきません。自然の神秘を感じます。ちなみに３行への変形は、「物理のかぎしっぽ」というサイトの「正方行列の

三連続積の展開」(http://hooktail.sub.jp/mathInPhys/3MatricesProduct/)を用いました。

3　具体例その２

二次ですでに一見実数の計算の裏に複素数が活躍するという状況を見たわけですが、好奇心から四次の直交行列を一つ考えて、対角化を行ってみました。蛇足ってやつです。これは、この JAPLA の拙論文「きれいな直交行列」(http://japla.sakura.ne.jp/workshop/workshop/2014/repo140802.pdf) から持ってきました。結果だけ書くと、

$$R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

は、固有値 1(重解), $i, -i$ を持ち、固有ベクトルは、

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} \tag{4}$$

となります。一応、三連続積を示しますと、

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{i}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + i \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & i \\ -1 & 1 & -i & -i \\ -i & i & 1 & 1 \\ -i & i & 1 & 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 & -1 & -i & -i \\ -1 & 1 & i & i \\ i & -i & 1 & 1 \\ i & -i & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned} \tag{5}
$$

となりました。以上から、直交行列はユニタリー行列で対角化できることを具体例で確かめました。実行列であっても、固有値論的には複素数が活躍していましたね。ユニタリー行列は固有値が絶対値が 1 の複素数ですが、その制限である直交行列の固有値は「絶対値が 1 の実数」ではなく、「絶対値が 1 の複素数」ということです。

4　定理 1 の系

ついでに美しい関係に触れておきましょう。

（系１）

正規行列 A は、ユニタリー行列 U で対角化でき、あるエルミート行列 H とあるユニタリー行列 R を用いて、$A = HR = RH$ と表せる。

（証明）

これは元々の着眼点は任意の複素数は $a + bi = re^{i\theta}$ と極座標表示ができることを利用しています。簡単のため３次行列で証明すると、

$$\begin{aligned} A &= U\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 + ib_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 + ib_3 \end{pmatrix} U^{-1} \\ &= U\begin{pmatrix} r_1e^{i\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & r_2e^{i\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & r_3e^{i\theta_3} \end{pmatrix} U^{-1} \\ &= U\begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_3} \end{pmatrix} U^{-1} \\ &= U\begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{pmatrix} U^{-1}U\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_3} \end{pmatrix} U^{-1} \\ &= HR \end{aligned} \tag{6}$$

となります。うーん、美しいですね。だから、行列は大好きです。それでは今回はこの辺で、お疲れ様でした！！