ブラーマグプタの不定方程式

SHIMURA Masato
http://japla.sakura.ne.jp

2015 年 1 月 22 日

目次

1　ブラーマグプタによる不等式の解法

ブラーマグプタ（598-668?　）数理天文学者　インド中西部の都市 Ujjain の天文台長

インド古典時代の業績として、次の 2 次不当方程式が取り扱われた。著書はアラブ語に訳されて西洋にも伝わる。

$$ax^2 + 1 = y^2$$

の正の整数解を求める。

1.1　完全平方の場合

- $8x^2 + 1 = y^2$ を解け
- ブラーマグプタのアルゴリズム
    1. 最小整数解は $x = 1 \longrightarrow y = 3$
    2. クロスに $x = 1, y = 3$ をセットする

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \nearrow \quad \searrow & \\ 1 & & 3 \end{array}$$

3. 次の x をクロスで求め, 与式に代入して y を求める

$$1 \times 3 + 1 \times 3 = 6$$

$$8 \times 6^2 + 1 = 17^2$$

4. 最小解と次の解の組をセットする

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \nearrow \quad \searrow & \\ 6 & & 17 \end{array}$$

5. クロスして解を求める

$$1 \times 17 + 3 \times 6 = 35$$

$$8 \times 35^2 + 1 = 99^2$$

6. 最小解とその次の解の組をセットする

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \nearrow \quad \searrow & \\ 35 & & 99 \end{array}$$

7. クロスして解を求める

$$1 \times 99 + 3 \times 35 = 204$$

$$8 \times 204^2 + 1 = 557^2$$

- 解の組

$$(1, 3)(6, 17)(35, 99)(204, 557) \cdots$$

1.2 J のスクリプト

- J の多項式の定義

$$f x = 8x^2 + 1$$

```
f0=: 1 0 8&p.
```

```
    f0  1 6 35 204
9 289 9801 332929


   %:&f0  1 6 35 204
3 17 99 577
```

- 完全平方の場合の解法 bg0

```
     f0 bg0 1 0 8


     1      3 1
     6     17 1
    35     99 1
   204    577 1
  1189   3363 1
  6930  19601 1
 40391 114243 1
235416 665857 1
```

右の数は付加数であり、完全平方の場合は 1 になる

1.3 J の Script

```
f0=: 1 0 8&p.    NB. 8x^2 + 1= y^2


bg0=: 1 : 0
NB. Usage: f0 bg0 1 0 8  NB. y is repeat times
```

```
mattmp=:matfix=: 1, %: u 1
addnum0=. (u 1)- {: y
ans=. < mattmp,addnum0
for. i. 7 do.
  mattmp=. ans0, ans1=. %: u ans0=.+/ . * MAT NB. power(+/ . *)
  addnum1=. (*: ans1)- ({: y) * *: ans0
  ans=. ans,<mattmp,addnum1
end.
>ans
)
```

1.4 経過と解説

1. 関数の定義 $f = 8x^2 + 1 = y^2$

   `f0=: 1 0 8&p.` NB. J の係数の順序は $a + bx + cx^2$ となる

   ```
     f0 1
   9
   ```

2. 数式を (左）引数として用いるように副詞型で作成 `1 : 0`
3. 交差の式をマトリクスで組み上げる

   ```
     MAT
   1 3
   1 3
   ```

4. J のプリミティブ Power を用いる
   - マトリクス
     $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
   - 行列式の値 (determinant) は単項の `-/ . *` $\longrightarrow ab - cd$
   - power 単項の `+/ . *` $\longrightarrow ab + cd$

     交差式を足し上げると x の値が求まる

     ```
       -/ . * 1 3,:1 3
     ```

```
    0
       +/ . * 1 3,:1 3
    6
```

5. x を $f0$ に代入すると y^2 が求まる

```
   f0 1 6 35
9 289 9801
```

6. 最小解と最後の解でクロスマトリクスを構成して、反復する

[*1]

[*1] 不完全平方の場合には付加数が 1 ではなくなり、神業的調整を行って整数ではない解を得ている。スクリプトはいずれ挑戦したい。

付録 A　連分数のスクリプト

```
d
   (i.10),.  1 x:  (+%)/\10$1x
0      1
1      2
2    3r2
3    5r3
4    8r5
5   13r8
6  21r13
7  34r21
8  55r34
9  89r55
```

```
   (i.10),. 2 x:  1 x:  (+%)/\10$1x
0  1  1
1  2  1
2  3  2
3  5  3
4  8  5
5 13  8
6 21 13
7 34 21
8 55 34
9 89 55
```

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$$

$$\frac{36}{11} = 3 + \frac{3}{11} = 3 + \frac{1}{\frac{11}{3}}$$

$$\frac{11}{3} = 3 + \frac{1}{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{36}{11} = 3 + \frac{3}{11} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = [3, 3, 1, 2]$$

References

ジョージ ·*G*· ジョセフ 垣田 · 大町訳「非ヨーロッパ起源の数学」講談社ブルーバックス 1996