

極形式グラフィックスによるいろいろな渦巻き曲線(Spiral) J-plot によるグラフィック・プログラム

西川 利男

0. はじめに—極形式は特殊ではない

グラフィックスで図形を表示するには、線を点の集合とみて、その位置をタテヨコXY座標を用いた直交形式で行うことが多い。

しかしながら、自然界では、原子分子の内部から、宇宙空間に至るまで、極座標の方がかえって自然であり、極形式による表示は直交形式に比べて、決して特殊ものではない。

極座標表示とは、ある点から見上げる角度 θ とその方向の動径の長さ r との関係式として示される。しかし、コンピュータグラフィックスではふつう直交座標 (x, y) で行われるので、極座標 (r, θ) からはつぎのような変換が必要である。

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

この後、扱おうとする渦巻き曲線、らせん(Spiral)は極形式グラフィックスにより、極めて自然に効率的に行われる。

1. いろいろならせん=渦巻き(Spiral)曲線[1, 2]とそのグラフィック・プログラム

[1] 岩波数学公式 I p. 285

[2] Wikipedia, 渦巻, 代数螺旋, など

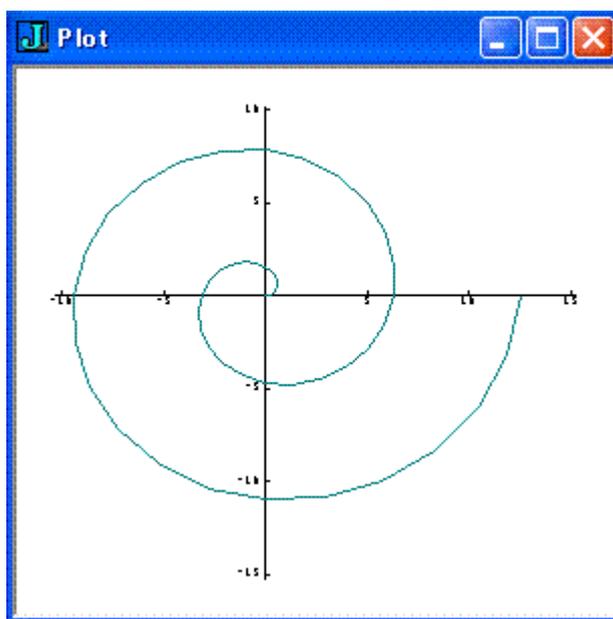
1. 1 アルキメデスのらせん

もっとも基本的で単純であるが、いろいろなところに現れる。

$$r = a \cdot \theta \quad \dots *) \quad a \text{ は定数}$$

Jのプログラムは次のようになる。

```
load 'trig'  
load 'plot'  
NB. Archimedes' Spiral  
alch =: 3 : 0  
n =. y.  
if. 0 = #n do. n =. 48 end.  
th =. (10 * i. >: n) * 1r120p1  
a =. 1  
r =. a * th  
plot (r * cos th); (r * sin th)  
)
```



*) ふつう、このような式で表されることが多いが、極座標とは r と θ との2つの値で表すことなので、個人的には $(r, \theta) = (a \cdot \theta, \theta)$ とするのが良いと思う。

1. 2 代数らせん、

一般に動径の長さ a が角度 θ の代数関数で表されるものが代数らせんと呼ばれる。

$$r = a \cdot \theta^k$$

1. 2. 1 放物らせん

特に、 $k = 1/2$ のもの

$$r = a \cdot \sqrt{\theta}$$

は、放物らせんであり、Jのプログラムは次のようになる。

NB. Parabolic Spiral

```
parab =: 3 : 0
```

```
n =. y.
```

```
if. 0 = #n do. n =. 198 end.
```

```
th=. (10 * i.>: n) * 1r120p1
```

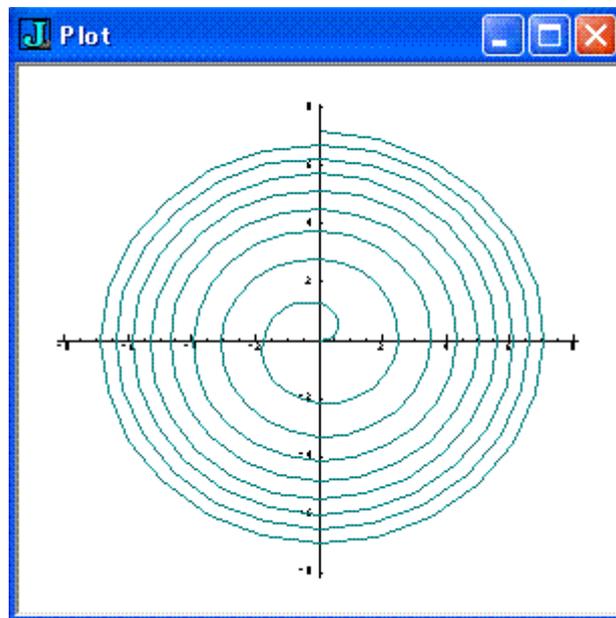
```
a =. 1
```

```
r =. a * %: th
```

```
plot (r * cos th); (r * sin th)
```

```
)
```

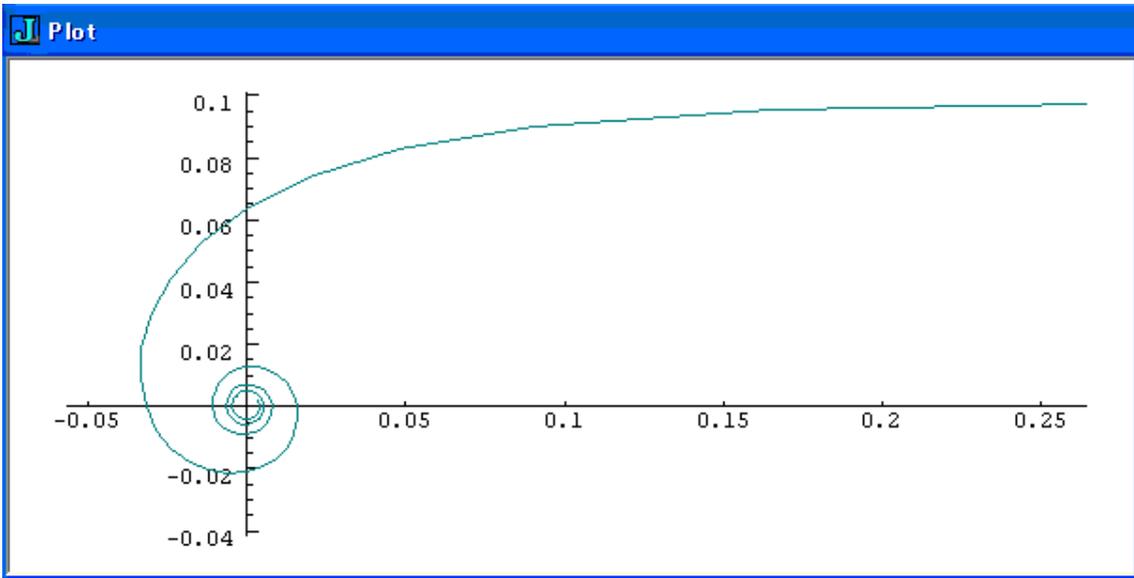
放物らせんは巻き数を増やすとだんだん詰まってくる。それに対してアルキメデスのらせんは巻き数を増やしても一定である。



1. 2. 2 双曲らせん

双曲らせん、 $k=-1$ は次の式で表される。

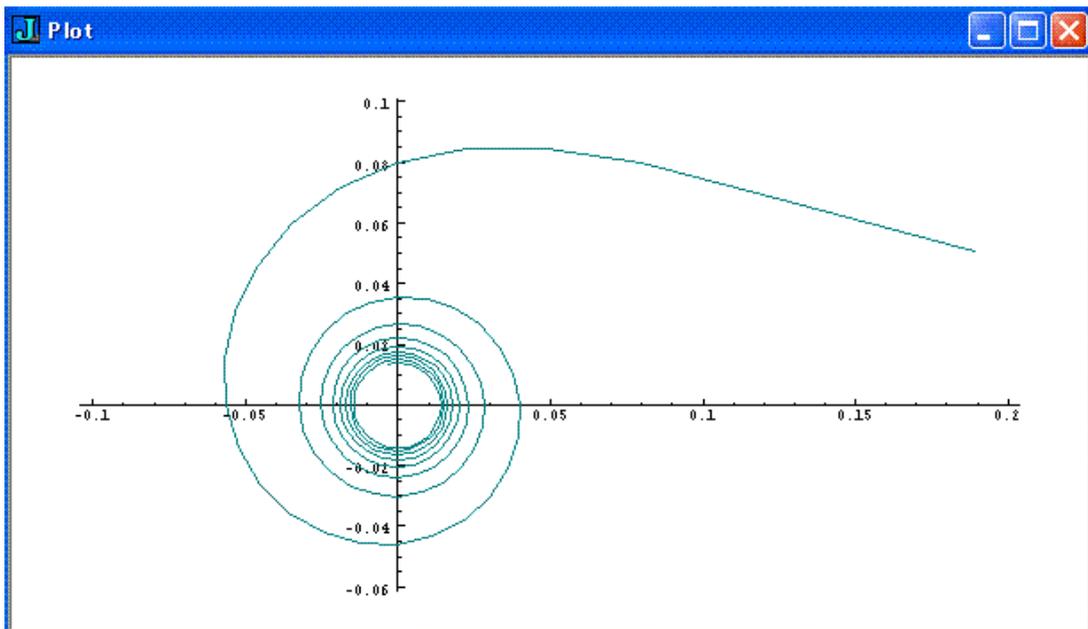
$$r = a \cdot \frac{1}{\theta}$$



1. 2. 3 ラップ線 (リチウス)

$k = -\frac{1}{2}$ はリチウスと呼ばれて、特異な形を示す。渦を巻いて原点 ($r = 0$) に近づいていく。

$$r = a \cdot \frac{1}{\sqrt{\theta}}$$



1. 3 対数らせん

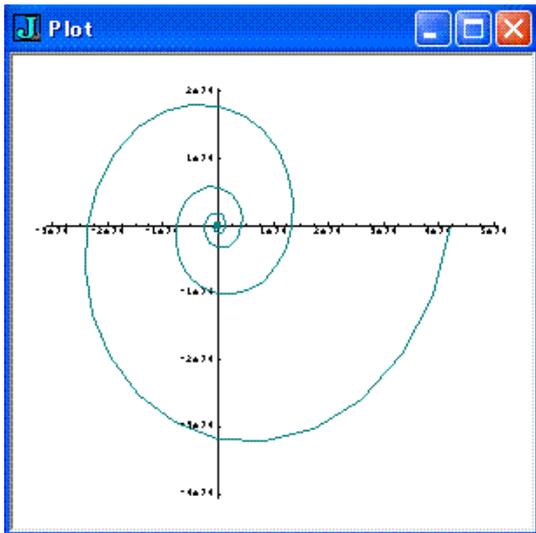
$$r = a^\theta$$

Jのプログラムは次のようになる。

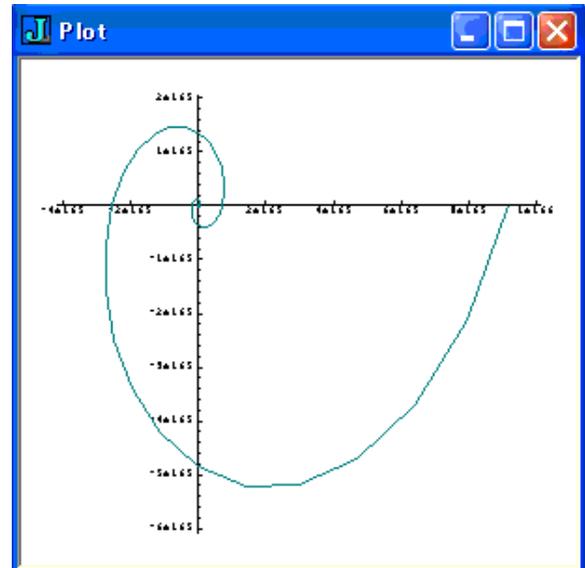
```
NB. Logarithmic Spiral
logspiral =: 3 : 0
1.5 logspiral ''
:
th=. (10 * i.49) * 1r120p1
a =. x.
NB. a =. 1.5
r =. a ^ th
plot (r * cos th); (r * sin th)
)
```

パラメータを変えると、いろいろらせんが現れる。

1.2 logspiral 180



1.5 logspiral 180



プログラム・リスト

NB. Spiral Graphics in Polar Expression

NB. by T. Nishikawa

NB. 岩波数学公式 I p.285

```
load 'trig'  
load 'plot'
```

NB. Archimedes' Spiral

```
alch =: 3 : 0
```

```
th=. (10 * i.49) * 1r120p1
```

```
a =. 1
```

```
r =. a * th
```

```
plot (r * cos th); (r * sin th)  
)
```

NB. Parabolic Spiral

```
parab =: 3 : 0
```

```
n =. y.
```

```
if. 0 = #n do. n =. 199 end.
```

```
th=. (10 * i.n) * 1r120p1
```

```
a =. 1
```

```
r =. a * %: th
```

```
plot (r * cos th); (r * sin th)  
)
```

NB. Hyperbolic Spiral

```
hyperb =: 3 : 0
```

```
n =. y.
```

```
if. 0 = #n do. n =. 99 end.
```

```
th=. (10 * >: i.n) * 1r120p1
```

```
a =. 0.1
```

```
r =. a * % th
```

```
plot (r * cos th); (r * sin th)  
)
```

NB. Lithius Spiral

```
lith =: 3 : 0
```

```
n =. y.
```

```
if. 0 = #n do. n =. 199 end.
```

```
th=. (10 * >: i.n) * 1r120p1
```

```
a =. 0.1
```

```
r =. a * % %: th
```

```
plot (r * cos th); (r * sin th)
```

```
)  
NB. Logarithmic Spiral  
logspiral =: 3 : 0  
1.5 logspiral ''  
:  
n =. y.  
if. 0 = #n do. n =. 198 end.  
th=. (10 * i. >: n) * 1r120p1  
a =. x.  
NB. a =. 1.5  
r =. a ^ th  
plot (r * cos th); (r * sin th)  
)
```