7/Aug/2015 Besselh27921b

ユークリッド互除法 と 連分数 と 近似分数

中野嘉弘　（ 札幌市、　92歳と半年 ）

FAX 011-588-3354,　　TEL 011-588-8877

0. はしがき

Yahoo の知恵袋での数学問答で、抜群に多いテーマが、この表題の問題である。 熱心な大学生の生々しい息吹にふれるのは、老齢を忘れるので、楽しんでおります。

木田祐司・牧野潔夫両氏の名著、「　UBA?SIC による コンピュータ整数論」　（ 文献1)を眺める事が多いのですが、最近、我が　JAPLA研究会報告　http://japla.sakura.ne.jp/ で、志村幹事長さんの論文 「ユークリッドの互除法、連分数と不定方程式」　(19/June/2015 、文献　2)　を拝見して、敬服致しました。

その後、西川会長様からも、「Jによる円周率　π の多桁計算」（ 文献3)の近作資料を頂きまして、老骨に火が付きました。 その結果、若干補足を書く気分になりました。

1. 互除法　と　連分数

志村氏の例は、「分数　105/38　を互除法を用いて　[2;1 3 4 2] の如く連分数化するもの」ですが、「互除法を
マトリックスで行う等々」、面白例が特徴的です。 私は、連分数らしく、割り算の分数付加の形式で、表示
して見ました。　中野流は互除法連分数は下記のようなものです。

```
   105  euclidnc0  38   ->

|  105│/│38│ = │2│+│29│/│38│
|  38│/│29│ = │1│+│9│/│29│
|  29│/│9│ = │3│+│2│/│9│
|   9│/│2│ = │4│+│1│/│2│
|   2│/│1│ = │2│+│0│/│1│
```

ここで、さらに最後の行を生かして（志村氏は最終行を省いて居られるが　）　、これから、連分数列

RA = [2 ; 1 3 4 2] が得られます。 [ ]内の セミコロンの前は整数部です。
この方法からは、目新しい結果が出るので、最後の 8 章にて再論する。
また、逆に、連分数列を与えて、初期の割り算 (近似分数) を求める事も可能である。
中野は、その為の関数、 contQ3 作った。
今の志村例で云えば、上記 RA から、 IS =. 2 1 3 4 2 (5 ヶ 数) として、

IS contQ3 5 から、
2 1 3 4 2
5
j st = 0
P=2.000000000000Q=1.000000000000P/Q=2.000000000000
1
1
P=3.000000000000Q=1.000000000000P/Q=3.000000000000
2
3
P=11.000000000000Q=4.000000000000P/Q=2.750000000000
3
4
P=47.000000000000Q=17.000000000000P/Q=2.764705882353
4
2
P=105.000000000000Q=38.000000000000P/Q=2.763157894737
5
即ち、初期分数 は 105 / 38 と判る。
これから、逆に互除数の計算をすれば、上記の志村例の計算の如くなる。
この 両者の手法を使えば、我々の当面の難問は、原理上は解決するであろう。
」
また、西川先生の近作「 J による円周率 π の多桁計算」 (文献 3) 内の有馬・会田の分数式をチェックした私 (互除法の中野関数 euclidnc0) の計算例では、 同じく
428224593349304x euclidnc0 136308121570117x から、 π の連分数列は、以下の 27項、
[3; 7 15 1 292 1 1 1 2 1 3 1 14 2 1 1 2 2 2 2 1 84 2 1 1
15 3] となりまして、木田・牧野両氏の結果 (19 項、文献 1) と末尾 8 項 を除き調和します。

西川先生の (文献3)の種本である大野栄一氏の講談社 B-889 の p.249 内の凡ての近似分数例を同様に処理した 私の不器用な J プログラム euclidnc0 と contQ3 等は、末尾に示した。
もっとも π 自身の数値の17世紀までの最高値は、オランダ人 Lugolph Ceulen コーレンの小数点以下35桁で、 π を「ルドルフ数」と呼び、彼の大哲ニュートン (1676 年) さえ 14桁でと云うが、 なんと日本人の村松茂清が寛文 3 年 (1663 年) 、21桁を示す数学書「算俎」を著している。 彼は浅野長矩

の家臣で、その一族は、吉良邸討ち入りの赤穂浪士であったと云うから驚きである。　彼は正 32768 角形を利用した。 算聖と云われた「関孝和」は当時 20歳だった。 また、その弟子・建部賢弘三兄弟は、 4 代将軍徳川家綱の弟・綱豊の甲府藩勘定吟味役であったが「剣術と算盤」の名人でもあった ！ 文武両道ですな。

2. 連分数列から 近似分数へ

私の先ず補足したい事は、前節の連分数列 RA=. [2 ; 1 3 4 2] から、志村例の 行列 M 即ち、 m0, m1, m2, m3, m4 を作る 別法でありまして（文献 2, p.4 の第３節、互除法をマトリックスで 、を参照 ）、 行列が、志村例より長大な場合には便利であろう。

```
RA より  M0 =. ( 5 1 ) $ 2 1 3 4 2 と  M1 =. (5 1 )$ 1 1 1 1 1 とを 用意し、
] M01 =. M0 , "1 M1 ->
   2 1
   1 1
   3 1
   4 1
   2 1
次に、   ] M10 =. 5 2 $ (1, 0) ->
   1 0
   1 0
   1 0
   1 0
   1 0
   ] M01M10 =. ( , M01) , "0 ( , M10)
   2 1
   1 0
   1 1
   1 0
   3 1
   1 0
   4 1
   1 0
   2 1
   1 0
  ] m0 =. 2 {. M01M10
   2 1
   1 0
   ] m1 =. 2 {. MM    =. ( 2 }. M01M10 )
   1 1
```

1 0
] m2 =. 2 {. MM =. (2 }. MM)
3 1
1 0
] m3=. 2 {. MM =. 2 }. MM)
4 1
1 0
]m4=. 2 {. MM=. (2 }. MM)
2 1
1 0

さらに、行列の内積 (inner product) 操作を ip 、
(例えば、 ip =: +/ . * NB. inner product) として、

m0 ip m1 ip m2 ip m3 ip m4 から
105 47
38 17
が得られる。

また、連結式 m0 ; m1 ; m2 ; m3 ; m4 -> に対応する結果は、
前記の志村論文に見える通りである。
この方法は、さらに改良できるが、それは、後章にて。

3. 近似分数

超越数の近似分数の例で最も有名な、円周率 π (pai) の連分数展開、
3 . 7 15 1 292 1 1 1 2 1 3 1 14 2 1 1 2 2 2 (19 項) から 最初の 6 項
まで採って行列表示をすれば、
m0; m1; m2; m3; m4; m5

```
┌─────────┬─────────┬───────────┬─────────┬─────────────┬─────────┐
| 3      1|7      1|15       1|1      1|292        1|1      1|
| 1      0|1      0| 1       0|1      0|  1        0|1      0|
└─────────┴─────────┴───────────┴─────────┴─────────────┴─────────┘
```

それらの内積は
m0 ip m1
22 3
7 1
m0 ip m1 ip m2
333 22
106 7

m0 ip m1 ip m2 ip m3
355 333
113 106
m0 ip m1 ip m2 ip m3 ip m4
103993 355
33102 113
m0 ip m1 ip m2 ip m3 ip m4 ip m5
104348 103993
33215 33102

これらから 数値的には、周知の 3 / １ , 22 / 7, 355/113 , 103993/33102 等の比が得られる ．。 6 項までで、最後 の比から、 43j40": x: 104348r33215 により、Pai の 近似値は 3.14159 26539 ..... となり、西川 (文献3)の参考値 3.14159 26535 89793 23846 26433 8327 と比較出来る。 19項まで採っての行列算ならば 3. 14159 26535 89793 2385 .... である。
行列算法もなかなか便利である。

これらの計算例を、木田、牧野等は、 UBASIC を用いて解いているが、私は、 J 言語を用いて、殆ど、同じ結果を得ているので、解説しようとして、この辺まで原稿を書いていたら、最近、 H27/ 8/ 12 (水) 頃、西川会長かの立派な論文 (文献 3) が到来したので、最早、続行の理由は失せたと思われた。

しかし、これで諦めたら、鈴木、西川、志村三氏発以外のペーパーが、品不足になって、Jの研究会会が淋しくなると思うので、この先の話題を 御披露 して置きましょう。

これにも、西川会長の報告書 「 J を使った連分数の計算と Bessel 関数、副題としてー 中野先生からの年賀状を 2014年の仕事始めに ー」 (文献 4) がある。
そしてさらに、我が J 言語研究会の会員諸兄 (慶応大の山下氏、東大の島田氏等々) の幾つかの面白い追加報告 をも知らされた。

4. 行列 の 利用

今回の志村論文 (文献2)に刺激されて、島田論文 (文献8)を 見直したところ、発端的重要な意味が感ぜられた。
それは、変形 第 1 種 ベッセル関数 In (x) に於ける漸化式 (循環式) の存在であって、Modified Bessel Function of first kind (Karman & Biot , Watson , Whitaker , 林 桂一 等々) についての話である。 即ち、

I(n+1, x) = - (2n / x) * I (n, x) + I(n - 1, x) ･･･・ (島田 , 2)

ここで、 x = 2 、 n = 1 で出発すれば、 I2 (2) = - 1 * I1 (2) + I0 (2) 即ち、

I2 = - 1 * I1 + I0 ･････ (島田, 3-1) と I1 =. I1 ････････(島田 , 3-2) .

纏めた行列表示で、縦・横の転置を 記号　t　で示して、

t(I2, I1) = t (- 1 1, 1 0) i p t (I1,   I0)　・・・・・・　(島田 , 4-1)

となる。

さらに、　n = 2　に上げれば、

t(I3,   I2) = t(-2 1, 1 0) ip   t (I2,   I1)　・・・・・・・・・・・・・・・・・　(島田 , 4-2)

これらを纏めて、

t(I3, I2) = t(-2 1, 1 0) ip t (- 1 1, 1 0) ip t (I1, I0)　。

一般化して、 n = m とすれば （ 島田 , 5)式が得られる。

さらに、逆行列化すれば、以下の （ 島田 , 9) 式となる。

t(I0, I1) = t (1 1, 1 0) ip t(2 1, 1 0) i p t (In,   I(n+1))　・・・・ (島田 , 9)

J 言語を用いて、この流儀の計算のイントロを実行して見せたのが、志村氏の論文 （ 文献 2） である。

これを真似びして、中野は実用例を、やって見ようと思う。

しかし行列の数式を初等論文内で書く事は困難ですな。 誰か、解説願えませんか　?

5.　変形第 1 種ベッセル関数の連分数展開　（ その 1 ）

実は、既に、文献 （ 6 c） の如く、計算済みとも思われるが、島田・ 志村論文流の　PR として、　J 言語で、再計算を行って見よう。

```
      ]  I17 =.  1 +  i. 17
1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17
   M0=.  (17  1)  $  I17
   M1=.  (17  1)  $  1
   M01 =.  M0 ,  "1  M1
   M10=.  (17  2)  $  (1,  0)
   M01M10 =.  (,  M01) ,  "0  ( ,  M10)
   ]m0=.  ( i. 2 )  {  M01M10
1 1
1 0
  ]m1=.  ( 2  +  i.2)   {  M01M10
2 1
```

1 0

]m2=. (4 + i.2) { M01M10

3 1

1 0

]m3=. (6 + i.2) { M01M 10

4 1

1 0

]m4=. (8 + i.2) { M01M10

5 1

1 0

最初の概算

m0 ; m1; m2 ; m3 ; m4

```
┌── ┬ ──┬── ┬──────┐
│  1 1│2 1 │3 1│4 1│5 1│
│  1 0│1 0 │1 0│1 0│1 0│
└────┴── ┴──── ──────┘
```

m0 ip m1 ip m2 ip m3 ip m4

225 43

157 30

さて、比 225 % 157 の単精度での値は 1.43312 で、
拡張精度（多倍長）計算値は、 43j40 ": x: 225r157 から
1.4331210191082802547770700636942675159236

また､関数表（林の表、 Watson の表､文献 9, 10）からも
I(n=0, x=2) % I(n=1, x=2) -> 1.43312..... である。

17ケの行列全体の計算

中野関数 frombox を用い、 M01M10 frombox 17 から、

0

ip result MIP

1 1

1 0

1

2 1

1 0

result MIP

3 1

2 1
2
3 1
1 0

MI =
10 3
7 2
ratio =
10
7
ratio value of 10 / 7 は、循環小数で、
1.4285714285714285714285714285714285714286
3
4 1
1 0
MI =
43 10
30 7
ratio =
43
30
ratio value of 43 / 30 は循環小数 1.4333 333 3.33 ・・・・・・ 。.
....

17 1
1 0
0 からスタートして 16 番目の行列は 比 は
MI =
764582487395121 448113731310733
533506283627401 312682405594432
の上下の行列要素の比であるので
ratio = 764582487395121 % 533506283627401 から、
多倍長演算で、
43j40 ": x: 764582487395121 r 533506283627401
1.4331274267223117583171834557757978319120

これから、 当面の 変形第 1 種ベッセル関数の値の比は

I(n=0, x=2) % I(n=1, x=2) ->

1.4331274267223117583171834557757978319120　として
小数点以下　1４桁位まで正しいであろう。

6.　変形第 1 種ベッセル関数の連分数展開 (その 2)

行列を経由せずの計算法:

連分数展開が 17桁の下記　I17 だとすれば、

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

中野関数　contQ3 を用いて

I17 contQ3 17　から

j st = 0
P=1.000000000000Q=1.000000000000P/Q=1.000000000000
1
2
P=3.000000000000Q=2.000000000000P/Q=1.500000000000
2
3
P=10.000000000000Q=7.000000000000P/Q=1.428571428571
3
4
P=43.000000000000Q=30.000000000000P/Q=1.4333333333
.（途中省略で）...

17
P=764582487395121.000000000000Q=533506283627401.00
0000000000P/Q=1.433127426722
比　= 1.433127426722 (小数点以下12桁まで正しいらしい)

● 若しも、連分数展開が 8 桁までで、下記の
I8 =. 1 2 3 4 5 6 7 8　だとすれば、

比　= 1.4331274267568 で、両者、互いに小数点以下　8 桁まで、一致する。
その昔 (2014/01/28 , 02/12) 、畏友、山下紀幸さまから、「連分数展開」と

「比」が一致する事を、どうして知ったのかな ? との質問状が到来して居た事を
思い出しますね。 実は、その前の (2013/12/13, 12/19) の2度、ヤフー
Yahoo 知恵袋 に投稿してあったのでしたが。

7. 変形第 2 種ベッセル関数の連分数展開

この様な漸化式を持つベッセル関数は、今までのものに限らない。 まだ、ある。
それは、 K0(x), K1(x) 等、第 2 種のもので、漸化式は符号が異なるのみである。
（文献 9） の 林の表（岩波版 ）や（文献 10） G.N.Watsonの大冊が参考になろう。

島田論文 (文献9)内の式番号で対比すれば
K(n+1 , x) = (2n / x) * K(n, x) + K(n-1, x)・・・ (島田 2 相当)

その結果、下記の如く、行列内の要素の符号中に負のものが
発生する点が、これまでと異なる。

m_0 =. 2 2 $ _1 1 1 0,
m_1 =. 2 2 $ _2 1 1 0,
m_2 =. 2 2 $ _3 1 1 0,
m_3 =. 2 2 $ _4 1 1 0,
m_4 =. 2 2 $ _5 1 1 0,
m_5 =. 2 2 $ _6 1 1 0,
....
....
m_12 =. 2 2 $ _13 1 1 0 等々となる。

志村論文 (文献 2) の行列積に対応する積の
m_0 ip m_1 ip ・・・・・ ip m_11 までの行列積は

1004933203 _83120346
_701216922...57999271 と成るので、比は

43j40 ": x: 1004933203x % _701216922x から
_1.43312742672235707825007085269074407432 25...

つまり、結果は、第 1 種の場合と符号が異なるのみで、 絶対値は等しい。

x:] KR_x=. _1.4331274267 (小数点下、10桁) を 用いると、中野関数
x: KR_x contfr2 10 から、 連分数展開は [_2; 1 1 3 4 5 6 7 8] となる。

また別法として、 x=2 に於ける、 n=0 と n=1 の
第 2 種ベッセル関数値
K(x=2 , n=0) = 0.121389, K(x=2, n=1) = 0.13987 から、
比 は、 KRx = 0.8142560949 (10 桁) となるので、 連分数展開すれば、
中野関数で、 x: KRx contfr2 10 から [0 ; 1 4 2 1 1 1 1 6 3] となる。

変形ベッセル関数の 第 1 種、 第 2 種 両者の間で、類似があるかどうか 興味がある。

その為に、第 1 種ベッセル関数 I0(x=2, n= 0) 、 I1(x=2, n= 1) の場合と、もう一度比較しよう。 その比 は、 x: IRx =. 1.4331274267(10桁) ,
この値は、志村の行列積法値と同じであるが、 x: IRx contfr2 10 からは、連分数展開は、
見事 [1; 2 3 4 5 6 7 8 5 2] であった。 色々、面白い事になりそうだ。

8. まとめ

中野発 -> 西川会長宛ての年賀状 (2014) で問題とした高桁数の連続連分数の展開例をはるかに
超えた20桁1 2 3 4 5 6 7 8 ･････････ 20の例を末尾に示そう。 本稿のまとめの意味もある。

その前に、この話題の始まりを、振り返ると、

1) 最初 は (Yahoo 知恵袋質問として、 2 年前の 2013/12/13 であったが)

Q : 分数 [1 ; 2, 3, 4 ....] を示す 1.43312 ･･･と云う数には、何か超越数などに関係ありますか ?

A (1) 変形ベッセル関数の比は I 0 (x=2) / I 1 (x=2) = 2.279585 / 1.59063 -> 1.433133413 ですので、あるいは、関係あるかも。 (Yahoo知恵袋 otoknei さん)

A (2) I0 (2) = 2.27959, I1(2) = 1.59064 から 比 = 1.43313 。
その連分数展開は、 6 桁までで 1 2 3 4 5 6 。 10桁までで 1 2 3 4 5 6 40 1 2 1 です。
中野関数で (1 2 3 4 5 6) contQ3 6 -> 1.433127572016 です (知恵袋 nakano さん)

2) 変形ベッセル関数の漸化式の利用 :
これには、島田氏の貢献は大きいが、 ユークリッド互除法による判り易い論理は捨て難い。

```
5275871481466581051 euclidnc0 81369418442407670
```

の J 言語による計算結果です。

長大な印刷（しかも横向き変換を期待　）ですので、本稿の末尾に置きますので、眺めて下さい。

文　献

1)　木田祐司・牧野潔夫　:「 UBASIC による コンピュータ整数論」
日本評論社、 1994/6/20 、pp. 225

2)　志村正人:「ユークリッドの互除法、連分数と不定方程式」
JAPLA研究会資料、 2015/6/19,　 http://japla.sakura.ne.jp

3)　西川利男:「Jによる円周率　π の多桁計算」
JAPLA研究会資料、2015/8/8,　 http://japla.sakura.ne.jp

4)　西川利男:「J を使った連分数の計算と　Bessel 関数、

副題として ー 中野先生からの年賀状を 2014年の仕事始めにー」

JAPLA研究会資料、 2014/1/18,　 http://japla.sakura.ne.jp

5)（この中には、問題の発端となった2014年の中野の年賀状がある。 ）

6a)starryokaさん「連分数や超越数の詳しい人に質問です。
連分数[1;2, 3, 4...] はどんな意味がありますか　？ 」
Yahoo 知恵袋「数学」2013/12/13 15:54:22
http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/
q12117863097

6b)otkneiさん「この連分数は変形ベッセル関数　In(X) を用いて
I0(2)/I1(2) = 1.4331274262231... と表せます。
因みに　 I0(2)= J0(2i) も超越数です　(Siegel,1929) 。」
この回答は BA(ベストアンサー　）を得ました。
http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/
q12117863097

6c)nakanochurchさん

相棒の回答者 otknei さんの連分数展開の数値 Check 結果は、
[1; 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17]と成った。
小数点以下の 11 までは正しいと思います。
この連分数の小数表記 (20 桁) は 1.4331272622311758 でしょう。
http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/
q12117863097

7) 山下紀幸 :「ベッセル関数の数値解を求める」
JAPLA研究会資料、 2014/3/15, http://japla.sakura.ne.jp
林 桂一:「高等関数表」 岩波書店、昭和 17年 9 月20日、
第 2 刷発行、
p.155 、第 20表 Bessel 関数I0(x),I1(x). 比 1.433127546 。
循環式 I(n-1, x) - I(n+1, x) = (2n/x)I(n,x) 。

8) 島田義弘:「漸化式と行列と連分数 (ベッセル関数を例に)」
JAPLA研究会資料、2014/04/19, http://japla.sakura.ne.jp 。

9) 林 桂一:「高等関数表」 岩波書店、昭和 17年 9 月20日、
第 2 刷発行、
p.155 変形 Bessel 関数 I0(x), I1(x) ,
x = 2 に於いて、 I0(x) = 2.27959, I1(x) = 1.50064 , 比 1.433127546
循環式 I(n-1, x) –I (n+1, x) = (2n/x)K(n,x) 。

p. 161 変形 Bessel 関数 K0(x), K1(x) ,
x = 2 に於いて、 K0(x) =0.11389, K1(x) = 0.13987 , 比 0.814256095
循環式 K(n-1, x) - K(n+1, x) = - (2n/x)K(n,x) 。

10) G.N .Watson : " A Treatise on the Theory of BESSEL FUNCTIONS "
Cambridge at the University Press 1922 .
p.699, Tables II. (e^-x) * I0(x), I1(x); (e^x)*K0(x), K1(x) 。
p.737~ 739 K0(x), K1(x), K2(x) ~ K9(x), K10(x)

11) 犬井鉄郎著「球関数・圓筒関数・超幾何級数」河出書房、
昭和23年6 月30日発行。 pp..581
漸化式、変形化 Bessel 関数
第 1 種 I (n + 1, z) = I(n – 1, z) – (2 n / z) ・ I(n, z) 、
第 2 種 K (n + 1, z) = K(n – 1, z) + (2 n / z) ・ K(n, z) 。
この草稿は、戦前、京城帝国大学理工学部物理学教室に在職中の初期に
書かれた。 戦後は、東大第一工学部数学力学教室に在職した。

中野　プログラム例

euclidnc0 =: 3 : 0

```
mem =. 0
 wr  a=. x
 wr  b=. y
    NB. c=. x
  k=. 0
 label_1.
      c=. a - b*(<. a % b)
      d =. b - c*(<. b % c)
     q=. (<. a % b)
 wr mem1=: a ; '=' ; q ; '*' ; b ;  '+' ; b | a
k=.k+1
  if. k>50  do. goto_e. end.
if. c = 0 do. goto_e. end.
      a=. b
     b=. c
      goto_1.
     wr 'wr2'
     wr2 =. b ; '-' ; c ;  '*' ; (<. b % c)  ; ' = ' ; d
    if. c = 0 do. goto_e. end.
     wr 'wr3'
    wr wr3 =. c ; '-' ; d ;  '*' ; (<. c % d)  ; ' = ' ; d|c

     label_e.
    mem
    ' '
    )
```

contQ3 =: 3 : 0

```
     :
 wr Q=. x
```

```
 wr n=. y
 Q_1=. 0
P_1=.Q0=.1
j=. 0
  wr ' j st = ' , ": j
P0=. q0=. 0{Q
jP=. P0
 jQ=. Q0

 jP PQprint jQ
NB. wr 'P=',( 0j12 ": x: jP), 'Q=',( 0j12 ": x: jQ), 'P/Q=',(0j12 ": x: jP % jQ)
 label_1.
wr j=.j+1
if. j >20 do. goto_e. end.
 wr q1=. j{x
P1=. (P_1 + q1*P0)
Q1=. (Q_1 + q1*Q0)
jP=. P1
 jQ=. Q1
jP  PQprint jQ
 NB.  wr 'P=',( 0j12 ": x: jP), 'Q=',( 0j12 ": x: jQ), 'P/Q=',(0j12 ": x: jP % jQ)
wr j=.j+1
 wr q2=. j{x
P2=. P0 + q2*P1
 Q2=. Q0 + q2*Q1
jP=. P2
 jQ=. Q2
NB. wr 'P=',( 0j12 ": x: jP), 'Q=',( 0j12 ": x: jQ), 'P/Q=',(0j12 ": x: jP % jQ)
 jP  PQprint  jQ
wr j=.j+1
 wr q3=. j{x
P3=. P1 + q3*P2
 Q3=. Q1 + q3*Q2
jP=.P3
  jQ=.Q3
NB. wr 'P=',( 0j12 ": x: jP), 'Q=',( 0j12 ": x: jQ), 'P/Q=',(0j12 ": x: jP % jQ)
jP PQprint jQ
 P0=. P3
 Q0=. Q3
 P_1=. P2
```

Q_1=. Q2
if. n>2 do. goto_1. end.
label_e.
' '
)

ユークリッド計算の図

| 5275871481466581051│/│3681369418442407670│ =
│1│+│1594502063024173381│/│3681369418442407670│

| 3681369418442407670│/│1594502063024173381│ =
│2│+│492365292394060908│/│1594502063024173381│

| 1594502063024173381│/│492365292394060908│ =
│3│+│117406185841990657│/│492365292394060908│

| 492365292394060908│/│117406185841990657│ =
│4│+│22740549026098280│/│117406185841990657│

| 117406185841990657│/│22740549026098280│ =
│5│+│3703440711499257│/│22740549026098280│

| 22740549026098280│/│3703440711499257│ = │6│+│519904757102738│/│3703440711499257│

| 3703440711499257│/│519904757102738│ = │7│+│64107411780091│/│519904757102738│

| 519904757102738│/│64107411780091│ = │8│+│7045462862010│/│64107411780091│

| 64107411780091│/│7045462862010│ = │9│+│698246022001│/│7045462862010│

| 7045462862010 | / | 698246022001 | = | 10 | + | 63002642000 | / | 698246022001 |

| 698246022001 | / | 63002642000 | = | 11 | + | 5216960001 | / | 63002642000 |

| 63002642000 | / | 5216960001 | = | 12 | + | 399121988 | / | 5216960001 |

| 5216960001 | / | 399121988 | = | 13 | + | 28374157 | / | 399121988 |

| 399121988 | / | 28374157 | = | 14 | + | 1883790 | / | 28374157 |

| 28374157 | / | 1883790 | = | 15 | + | 117307 | / | 1883790 |

| 1883790 | / | 117307 | = | 16 | + | 6878 | / | 117307 |

| 117307 | / | 6878 | = | 17 | + | 381 | / | 6878 |

| 6878 | / | 381 | = | 18 | + | 20 | / | 381 |

| 381 | / | 20 | = | 19 | + | 1 | / | 20 |

| 20 | / | 1 | = | 20 | + | 0 | / | 1 |