JAPLA 研究会資料　2014/08/02

きれいな直交行列

島田　義弘

きれいな直交行列概要

線型代数の本を読んでいて次のような行列を見つけました。

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \tag{1}$$

これは、列ベクトルの集合と見て、

$$\begin{pmatrix} \cos 0 & \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \\ \cos 0 & \sin 0 & \cos 0 \\ \cos 0 & \sin\frac{-2\pi}{3} & \cos\frac{-2\pi}{3} \end{pmatrix} \tag{2}$$

をそれぞれ正規化したものはきれいな直交行列と見られます。そこで任意の大きさの行列に対し、きれいな直交行列を求めてみました。

この話をするには、まず完成形を書いてしまう方がよいでしょう。奇数次の $2n+1$ 次行列の場合、

$$
\begin{pmatrix}
\cos 0 & \sin \frac{2n\pi}{2n+1} & \cos \frac{2n\pi}{2n+1} & \sin \frac{4n\pi}{2n+1} & \cdots & \cos \frac{2n^2\pi}{2n+1} \\
\cos 0 & \sin \frac{2(n-1)\pi}{2n+1} & \cos \frac{2(n-1)\pi}{2n+1} & \sin \frac{4(n-1)\pi}{2n+1} & \cdots & \cos \frac{2n(n-1)\pi}{2n+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cos 0 & \sin \frac{2\pi}{2n+1} & \cos \frac{2\pi}{2n+1} & \sin \frac{4\pi}{2n+1} & \cdots & \cos \frac{2n\pi}{2n+1} \\
\cos 0 & \sin 0 & \cos 0 & \sin 0 & \cdots & \sin 0 \\
\cos 0 & \sin \frac{-2\pi}{2n+1} & \cos \frac{-2\pi}{2n+1} & \sin \frac{-4\pi}{2n+1} & \cdots & \cos \frac{-2n\pi}{2n+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cos 0 & \sin \frac{-2n\pi}{2n+1} & \cos \frac{-2n\pi}{2n+1} & \sin \frac{-4n\pi}{2n+1} & \cdots & \cos \frac{-2n^2\pi}{2n+1}
\end{pmatrix}
\tag{3}
$$

偶数次の $2n$ 次行列の場合、

$$
\begin{pmatrix}
\cos 0 & \sin \frac{(2n-1)\pi}{2n} & \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n} & \sin \frac{2(2n-1)\pi}{2n} & \cdots & \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} \\
\cos 0 & \sin \frac{2(n-3)\pi}{2n} & \cos \frac{2(n-3)\pi}{2n} & \sin \frac{2(2n-3)\pi}{2n} & \cdots & \sin \frac{(2n-3)\pi}{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cos 0 & \sin \frac{\pi}{2n} & \cos \frac{\pi}{2n} & \sin \frac{2\pi}{2n} & \cdots & \cos \frac{\pi}{2} \\
\cos 0 & \sin \frac{-\pi}{2n} & \cos \frac{-\pi}{2n} & \sin \frac{-2\pi}{2n} & \cdots & \cos \frac{-\pi}{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cos 0 & \sin \frac{-2(n-3)\pi}{2n} & \cos \frac{-2(n-3)\pi}{2n} & \sin \frac{-2(2n-3)\pi}{2n} & \cdots & \sin \frac{-(2n-3)\pi}{2} \\
\cos 0 & \sin \frac{-(2n-1)\pi}{2n} & \cos \frac{-(2n-1)\pi}{2n} & \sin \frac{-2(2n-1)\pi}{2n} & \cdots & \sin \frac{-(2n-1)\pi}{2}
\end{pmatrix}
\tag{4}
$$

となります。これらはこのままでは規格化されていないので、列に関して規格化する必要があります。具体的に書いてみると、

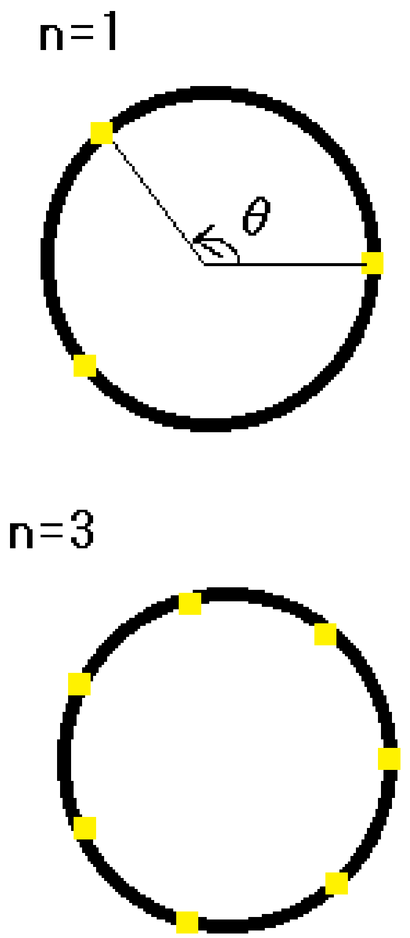

図１　奇数次の行列の基本角

2n+1=1(n=0)

$$\left(\cos 0\right) \rightarrow \left(1\right) \tag{5}$$

2n=2(n=1)

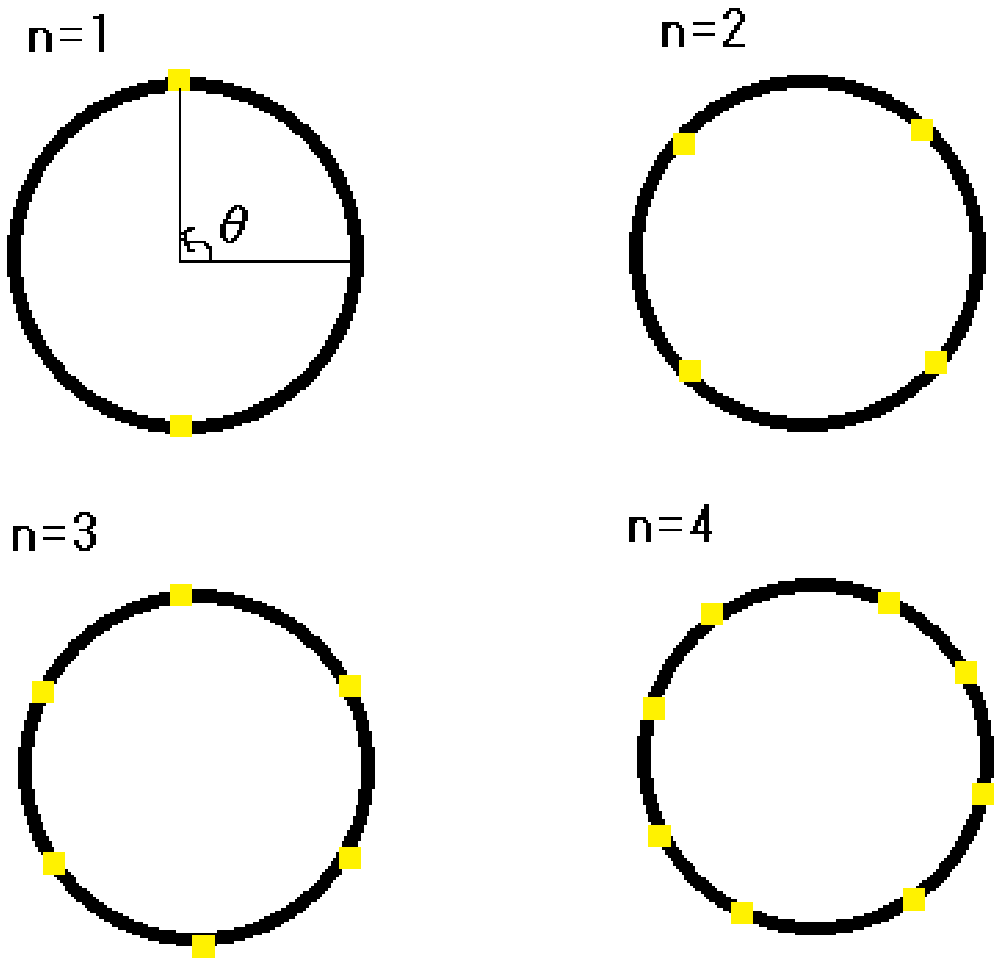

図 2　偶数次の行列の基本角

$$\begin{pmatrix} \cos 0 & \sin \dfrac{\pi}{2} \\ \cos 0 & \sin -\dfrac{\pi}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

2n+1=3(n=1)

$$\begin{pmatrix} \cos 0 & \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \\ \cos 0 & \sin 0 & \cos 0 \\ \cos 0 & \sin -\frac{2\pi}{3} & \cos -\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

2n=4(n=2)

$$\begin{pmatrix} \cos 0 & \sin\frac{3\pi}{4} & \cos\frac{3\pi}{4} & \sin\frac{3\pi}{2} \\ \cos 0 & \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{2} \\ \cos 0 & \sin -\frac{\pi}{4} & \cos -\frac{\pi}{4} & \sin -\frac{\pi}{2} \\ \cos 0 & \sin -\frac{3\pi}{4} & \cos -\frac{3\pi}{4} & \sin -\frac{3\pi}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

2n=6(n=3)

$$\begin{pmatrix} \cos 0 & \sin\frac{5\pi}{6} & \cos\frac{5\pi}{6} & \sin\frac{5\pi}{3} & \cos\frac{5\pi}{3} & \sin\frac{5\pi}{2} \\ \cos 0 & \sin\frac{3\pi}{6} & \cos\frac{3\pi}{6} & \sin\frac{3\pi}{3} & \cos\frac{3\pi}{3} & \sin\frac{3\pi}{2} \\ \cos 0 & \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{2} \\ \cos 0 & \sin -\frac{\pi}{6} & \cos -\frac{\pi}{6} & \sin -\frac{\pi}{3} & \cos -\frac{\pi}{3} & \sin -\frac{\pi}{2} \\ \cos 0 & \sin -\frac{3\pi}{6} & \cos -\frac{3\pi}{6} & \sin -\frac{3\pi}{3} & \cos -\frac{3\pi}{3} & \sin -\frac{3\pi}{2} \\ \cos 0 & \sin -\frac{5\pi}{6} & \cos -\frac{5\pi}{6} & \sin -\frac{5\pi}{3} & \cos -\frac{5\pi}{3} & \sin -\frac{5\pi}{2} \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

となります。これらの（第２列目と第３列目の）角度は図 1,2 を見ればイメージがわくかと思います。

応用：ローパスフィルタ、微分

ここでこのきれいな直交行列を P と置きます。そこで、適当な列ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると、$P^{-1}\boldsymbol{x} = P^T\boldsymbol{x}$ は、P のそれぞれの成分がどれだけ入っているか、それを周波数の低い順に並べたものになります。そこで、低次ほど重みを大きくかけて、成分を調整したベクトルに再び P を掛けると、ローパスフィルタが構成できます。

つまり、

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix} \tag{11}$$

などとしてやれば、ローパスフィルタは、

$$\boldsymbol{x}' = P\Lambda P^T\boldsymbol{x} \tag{12}$$

です。また、微分もできます。例えば５次の行列で作ると、

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

とすればよいです。ためしに、３次の行列について、$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を微分すると、

$$
P\Lambda P^T \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{14}
$$

$$
= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{15}
$$

となります。