JAPLA 研究会資料　2014/04/19

漸化式と行列と連分数
(ベッセル関数を例に)

島田　義弘

皆さん、初めまして。前回からこちらの日本 APL 学会に参加させて頂くことになった島田義弘と言います。以後、よろしくお願いします。今回が初の発表です。頑張ります！西川先生から教えていただいた[*1]、ベッセル関数と連分数のお話を自分なりに考えてみました。問題となる定理を挙げておくと、

定理

変形ベッセル関数 $I_n(x)$ に於いて、$x = 2$ である $n = 0, 1$ の二者の比は、次のような連分数で表される。

$$\frac{I_0}{I_1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\cdots}}}} \tag{1}$$

とても面白いと思います。

1. 導入

一応、確認しておきます。今回、考えたいのはベッセル関数 $J_\alpha(x)$ ではなく、そのベッセル関数を使って、$I_\alpha(x) = i^{-\alpha} J_\alpha(ix)$ と表される変形ベッセル関数 $I_\alpha(x)$ と呼ばれるものです。これはつまり、三角関数の引数を純虚数化

[*1] その西川先生は、僕はお会いしたことが無いのですが、中野先生という方からお話しを聞いたとのことです。その中野先生は次の Yahoo でご覧になったようです。http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q12117863097

して、双曲関数を得たように、ベッセル関数の引数を純虚数化したものを、変形ベッセル関数というようですね。

２. 漸化式と行列

変形ベッセル関数には、皆さんご存じの通り、漸化式による関係があります。前回の研究会で山下さんから頂いた高等関数表写しの変形ベッセル関数の項目によると、

$$I_{n+1}(x) = -\frac{2n}{x}I_n(x) + I_{n-1}(x) \tag{2}$$

となります。$x = 2$ に注目すると、その時に限り式は簡単化され、

$$I_{n+1}(2) = -nI_n(2) + I_{n-1}(2) \tag{3}$$

以降、引数の (2) を省略します。そして、これを行列表示すると、漸化式の反復は行列の積になり、

$$\begin{pmatrix} I_{n+1} \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n \\ I_{n-1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

と表現できます。よって、これを反復し、I_1, I_0 だけで表すと、

$$\begin{pmatrix} I_{n+1} \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(n-1) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

ここで、二次行列 $\begin{pmatrix} -n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めます。なぜそんなことをするかというと、後に二次行列の言わば「標準形」が連分数と一対一に対応するのですが、その形式に持っていきたいからです。求めますと、

$$\begin{pmatrix} -n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(-n)\cdot 0 - 1\cdot 1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix} \tag{6}$$

となります。よって、

$$\begin{pmatrix} I_n \\ I_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n+1} \\ I_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

ここで２次行列は二つの式をまとめて書いたものであることを思い返すと、適切に列ベクトルの入れ替えを行えば、２次行列の列同士、行同士を入れ替えることができることが分かります。つまり、

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n \\ I_{n+1} \end{pmatrix} \tag{8}$$

と変形できます。実はこの式 (8) の二次行列が「標準形」なのです。逐次代入を繰り返して、左辺を $\begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \end{pmatrix}$ へ帰着すると、

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n \\ I_{n+1} \end{pmatrix} \tag{9}$$

となります。

３. 二次行列と連分数

少し天下り的ですが、二次行列と連分数の間には、次のような対応関係があります。（数種類の流儀があるようですが、今回は以下のような対応を用います。）

$$a_1 + \frac{b_1}{x_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

何が嬉しいかというと、x の中にさらに分数が入れ子になっても、行列は積になり形式を保つからです。つまり、式 (10) の行列を計算すると、（ただし、後の便宜の為添え字を変えてあります。）

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_2 x_2 + b_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} a_2 + \dfrac{b_2}{x_2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{11}$$

となります。二個目の記号は等号ではありません。行列の対応物である連分数が、上段下段を同じ数で割っても、（分数の値）＝（右辺の上段）/（右辺の下段）という対応は変わらず成立する為、上下の段を共通の数 x で割ったのです。さて、式 (11) の下段は、式 (10) の行列にかかる列ベクトルと同じ形式ですね。つまり、これで入れ子構造ができました。$\begin{pmatrix} a_2 + \dfrac{b_2}{x_2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ として、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 + \dfrac{b_2}{x_2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{12}$$

この → はさっきと逆に、上下段に同じ x_2 を掛けたことを示します。ここまでで、ピンと来なくても、次の関係を見て頂ければ、一目瞭然だと思います。つまり、

$$
\begin{aligned}
a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{x_2}} &= a_1 + \frac{b_1 x_2}{a_2 x_2 + b_2} \\
&= \frac{(a_1 a_2 + b_1) x_2 + a_1 b_2}{a_2 x_2 + b_2} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{13}
$$

という対応があるわけです。うーん、面白いですね。

４. 第２節と第３節の結合

式 (9) へ戻りましょう。再掲すると、

$$
\begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n \\ I_{n+1} \end{pmatrix} \tag{14}
$$

です。これはつまり、連分数に対応させて、途中まで書くと、

$$
\frac{I_0}{I_1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{I_5}{I_4}}}} \tag{15}
$$

という形をしています。有限の段数で止めるということは、$n \to \infty$ の時、

$$
\frac{I_{n+1}}{I_n} \to 0 \tag{16}
$$

となることなので、これを確認すれば、晴れて漸化式（式 (3)）を満たす I_n $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ は、連分数（式 (15)）を満たすことが分かります。

この先は、ちょっとズル（？）してべき級数表示を用います。整数 n に対し、

$$I_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!(n+r)!}(\frac{x}{2})^{n+2r} \tag{17}$$

となります。ここで、$\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$ を上からおさえるには、$I_{n+1} < \alpha, I_n > \beta$ を満たす適当な数を求めます。

まずは、I_{n+1} の評価から、

$$\begin{aligned} I_{n+1}(2) &= \frac{1}{0!(n+1)!} + \frac{1}{1!(n+2)!} + \frac{1}{2!(n+3)!} + \cdots \\ &< \frac{1}{0!(n+1)!} + \frac{1}{1!(n+1)!} + \frac{1}{2!(n+1)!} + \cdots \\ &= \frac{e}{(n+1)!} \end{aligned} \tag{18}$$

となります。次に I_n の評価です。これは簡単で、初項以外を切り捨てます。つまり、

$$\begin{aligned} I_n(2) &= \frac{1}{0!n!} + \frac{1}{1!(n+1)!} + \frac{1}{2!(n+2)!} + \cdots \\ &> \frac{1}{n!} \end{aligned} \tag{19}$$

よって、式 (18)、(19) により、

$$
\begin{aligned}
\frac{I_{n+1}}{I_n} &< \frac{n!e}{(n+1)!} \\
&= \frac{e}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

となり、無事０に収束することが分かりました。

５. 連分数展開の収束性

そうそう、連分数が収束することを示していませんでした。それには、まず、

$$
\begin{aligned}
\frac{I_0}{I_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n \\ I_{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n \\ I_{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

と置きます。

$$
\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\tag{22}
$$

ここで、式 (21) の右辺が収束するには、I_{n+1}/I_n がゼロに収束することから、p_n/q_n が収束することを言えばいいでしょう。それには、コーシーの収束定理を使えばよさそうです。$n \to \infty$ の時、$p_n/q_n - p_{n-1}/q_{n-1} \to 0$ を示せばいいのですね。これはつまり、

$$
\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{np_{n-1} + p_{n-2}}{nq_{n-1} + q_{n-2}} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}
\tag{23}
$$

$p_n, q_n \sim n!$ であることを考えれば、ほぼ明らかに上の式はゼロに収束します。（$n! \le p_n, q_n \le (n+1)!$ は数学的帰納法から容易に求められます。）

とても楽しい数学の時間でした。お疲れ様でした。