

カオス（非線形現象）をもっと身近に ローレンツ・カオスの3Dグラフィックス

西川 利男（日本APL協会, JAPLA）

0. はじめに

技術数学においては、微分方程式系を解いて、力学系、機械系、電気系の解析を行うことは基本の技術である。

しかしながら、たとえ数式によるモデルが立てられても、微分方程式系に交差項がある、つまり非線形であるとき、その取り扱いが容易ではなくなる。その解はカオス状態になることが多い。

筆者がボランティアで出ている日本科学未来館では、今ちょうど時期を同じくして、「1たす1が2じゃない世界」と題して、自然界から医療、社会にいたるさまざまな分野での展示を行っている。

技術においても、数理の研究テーマとしてだけでなく、もっと日常の身近なものとして、カオス（非線形現象）を認識していただきたく小論を展開した。

1. 数式モデルを立てる

日本科学未来館の展示「1たす1が2じゃない世界」では、まず導入として、次のように始まっている。自然界、山や川、そこに生きる人間を含めた動物、植物の生のいとなみから、気象、地震、災害、環境など、さらには医療から交通、経済活動など社会現象にいたるまで、これらをくわしく調べるには数値による扱いとそれを用いた数式化、すなわち数式モデルを立てることがその第一歩となる。この上にコンピュータによる解析が可能となり、さらに進んで人間への利用となるのである。

この典型的な例が、太陽や星、月の観測をもとに、地球が太陽のまわりをめぐるといふ地動説である。ここではコペルニクス、ケプラー、ガリレオ、ニュートンといった先人の名前が16、17世紀の歴史にかがやいている。

ニュートンの力学と微分法の確立は、暦や日食、月食をとおして天体の運行は、初期状態が与えられれば未来の予測はすべてかなうという因果律として、時計じかけの科学という哲学さえもたらした。

2. カオス現象のはじまり

時代は18世紀となりオイラー、ラグランジュからポアンカレらの登場により、ニュートンの力学の絶対性にほころびが見えてきた。それがカオス現象のはじまりである。

つまり、月の異常な運行、冥王星の発見など、太陽系の惑星の位置天文学は予想した以上に複雑で、なかなか一筋縄ではいかない。しかし、ここではこのテーマから離れて、もっと単純な振り子の問題について考えよう。

3. いろいろな振り子と身近なカオス

ふつう振り子というと、時計の振り子を頭に描くであろう。(今では、時計はクォーツで、振り子をみたこともない若者も多いかもしれない。) 振り子とは上からぶらさがったおもりに過ぎないが、これには深い物理現象が隠されている。

イアン・スチュアートは単方向振り子ということばを使って、もっとひろくいろいろな振り子をやさしく説明している[1]。静止した真下の点で水平方向に力を加えたとき、その力が非常に大きければ、上まで行ってぐるぐる回ってしまうが、これが単方向振り子となる。中程度の力であれば、おもりは最高点まで行ってふつうの双方向の振り子となる。振れ角がわずかなときに限り、単振動となり初等力学で簡単に解けて、次のように、振り子の周期はその長さ l と重力加速度 g とで表せる。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{ここで } T \text{ は周期、 } l \text{ は長さ、 } g \text{ は重力加速度}$$

振れ角が大きくなった一般の場合は、周期は楕円関数を含むものものしい式になる。

さらに2つの振り子をつないだ2重振り子があるが、このときは開始の位置によっては、計算の予測もつかない異常なカオスの運動となる。

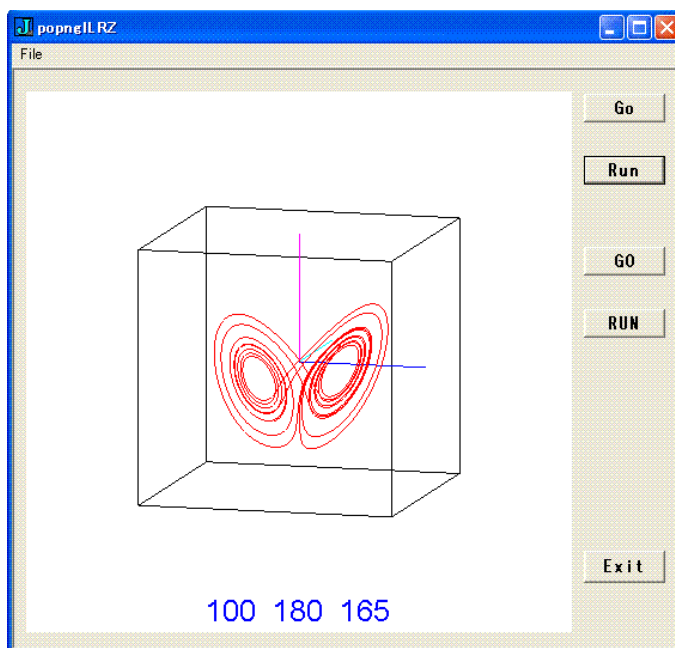
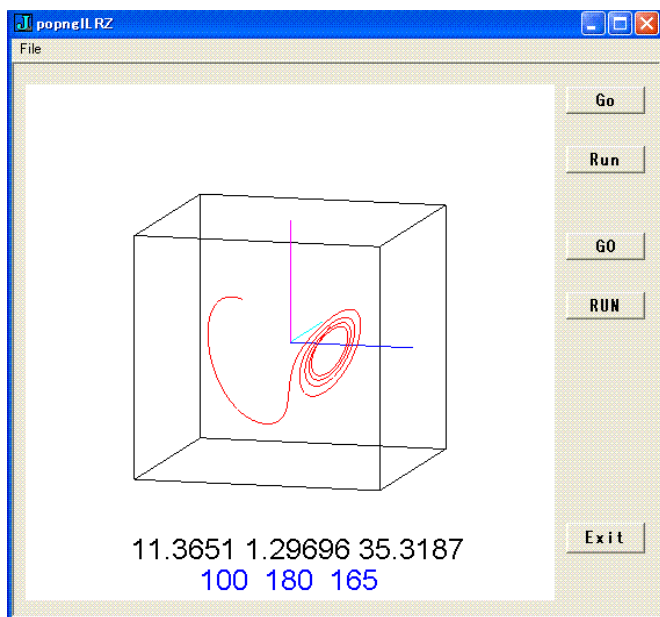
4. ローレンツの式によるカオスとその3Dグラフィックス

科学のいろいろな測定値、温度、風向、気圧などの値を位相的に扱い、つまり幾何学の位置 X , Y , Z としてグラフ表示することは、ふつうによく行われる。

MITの気象学者ローレンツによる数値気象学における次の連立微分方程式系の解はカオス現象を示すことで有名である。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -sx - sy & \text{where} \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + rx - y & s = 10, r = 28, b = 8/3 \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz \end{aligned}$$

この微分方程式系では交差項が存在すること、つまり非線形の微分方程式であることが、カオスとなるポイントである。このような数式だけの計算でも初期値のわずかな誤差がカオスが発生し、これは決定論的カオスとよばれる。グラフ例は次ページにしめすが、見る位置によってチョウチョのようにも見える図形となる[2]。



5. さまざまところにカオスがある

すべての自然現象、社会現象は、非線形の数式を含まざるをえない。したがって、長期の気象予報、さらには株価、経済の予想はこのようにむずかしい。カオスは単に混沌であるとするのではなく、身近に起きる科学の現象として理解してもらいたい。

- [1] イアン・スチュアート、須田、三村訳「カオス的世界像」白揚社(1993).
- [2] 西川利男「ローレンツなどカオスの3Dグラフィックス-J-OpenGLにより、カオスの実行を段階的に観察する」JAPLA 研究会資料 2014/8/2

2014年度全国大会（豊橋）の講演発表の申し込み

以下のとおり、講演発表の申し込みをいたします。

- ① 西川 利男（日本APL協会）
- ②

カオス（非線形現象）をもっと身近に
ローレンツ・カオスの3Dグラフィックス

概要

技術数学においては、微分方程式系を解いて、力学系、機械系、電気系の解析を行うことは基本の技術である。

しかしながら、たとえ数式によるモデルが立てられても、微分方程式系に交差項がある、つまり非線形であるとき、その取り扱いは容易ではなくなる。その解はカオス状態になることが多い。

筆者がボランティアで出ている日本科学未来館では、今ちょうど時期を同じくして、「1たす1が2じゃない世界」と題して、自然界から医療、社会にいたるさまざまな分野での展示を行っている。

技術においても、数理の研究テーマとしてだけでなく、もっと日常の身近なものとして、カオス（非線形現象）を認識していただきたく小論を展開した。

（キーワード）

カオス、非線形現象、非線形微分方程式系、ローレンツ図形、3Dグラフィックス

- ③ 連絡先
〒277-0014
柏市東2-4-17
toshio.nishikawa@jcom.home.ne.jp
- ④ 使用機器
OHP、パワーポイント、PC