確率微分方程式ノート (No.1）

SHIMURA Masato
jcd02773@nifty.ne.jp

2013 年 3 月 19 日

目次

概要

はじめに

インフレターゲット 2% を掲げる政権に変わって 3 ヶ月で株価が 50% 近く上がり、積極的な金融政策を掲げる日銀総裁への期待も含めて円が 20% も下落している。

従来型の経済モデルの多くは金融の過激な動きについていけていない。TV のニュース番組で次のようなコメントがあった。

- このままではインフレに突入しないか
- 大丈夫。今までが逆バブルであった。これを修正している過程だ

変動の激しい金融市場には確率微分方程式モデルがよく用いられる。

確率微分不定式は次のような形をしている

$$dx = adt + bdz$$

1　株価の確率微分方程式

1.1　伊藤過程（一般）

$$dx = adt + bdz$$

変数 x と時間 t の関数 G は伊藤過程に従う

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz$$

1.2　株価の伊藤過程

確率過程を用いた将来の株価の実現。

- 株価は対数正規分布に従う

株価=幾何ブラウン運動モデル

$$\Delta S = \mu \cdot S\Delta t + \sigma \cdot S \cdot \Delta z \tag{1}$$

$$\left(\begin{array}{llll} S & \text{株価} & \Delta S & \text{微少時間}\Delta t\text{での株価変動} \\ \mu S & \text{ドリフト率} & & \text{トレンド} \\ \sigma & \text{株価の標準偏差} & \text{ボラティリティ} & \sqrt{\text{分散}} \\ \Delta z & \text{ウイーナー過程に従う変数} & & \end{array}\right.$$

(1) の両辺を S で割ると

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu\Delta t + \sigma \cdot \Delta z$$

株価の変化率（収益率）は平均 $\mu\Delta t$ で、標準偏差 $\sigma\sqrt{\Delta t}$ の正規分布に従う。

$$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dz$$

伊藤過程

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S\,dz$$

$G = lnS$ だから

$$\begin{cases} \rightarrow & \dfrac{\partial G}{\partial x} = \dfrac{1}{S} \\ \rightarrow & \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\dfrac{1}{S^2} \\ \rightarrow & \dfrac{\partial G}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

*1

(S が枯れ葉のように落ちる)

$$dG = \left(\frac{1}{S}\mu S - \frac{1}{2}\frac{1}{S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{1}{S}\sigma S\, dz$$

$$= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dz$$

■数値例　出典:石井 chap63

$$\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dz$$

株価の対数 G の変化率（収益率）dG は

1. 　ドリフト率 $\mu - \dfrac{\sigma^2}{2}dt$ 　で、標準偏差が σ であるウインナー過程に従う
2. すなわち、平均が $(\mu - \dfrac{\sigma^2}{2}(T-t)t$ で、標準偏差 $\sigma\sqrt{(T-t)}$ の正規分布に従う。

$$lnS_T - lnS \sim \phi((\mu - \frac{\sigma^2}{2}(T-t),\ \sigma^2\sqrt{T-t})$$

$$lnS_T \sim \phi(lnS + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}(T-t),\ \sigma^2\sqrt{T-t})$$

株価	500 円	
期待収益率	5%	μ
ボラティリティ	30%	σ
期間	一年後　$T-t$	

$$lnS\,t \sim \phi\left(ln500 + \left(0.05 - \frac{0.3^2}{2}\right)\times 1\quad, 0.3\times\sqrt{1}\right)$$

$$\sim \phi(6.21461 + 0.005\ \ , 0.3)$$

*1　対数関数の微分
$lnt \rightarrow \dfrac{1}{t}$
$\dfrac{1}{t} \rightarrow -\dfrac{1}{t^2}$

$$\sim \phi(0.621961,\ 0.3)$$

*2

$2\sigma = 1.96$ を両側に取ると

$$6.21961 - 0.3 \times 1.96 < lnSt < 6.21961 + 0.3 \times 1.96$$

$$lne^{5.61961} < lnSt < lne^{6.81961}$$

株価は一年後に次のゾーンにいる

$$275.8 < St < 915.6$$

A) ボラティリティ 30% 程度での上限と下限が示される
Z) と言われてもあまり嬉しくないが
A) 巨大な変動でも条件を変えて変動幅が予測できる

2　ブラック · ショウルズ　モデル

ヨーロピアンオプションの価格を求める著名なモデル

株価 S が伊藤過程

$$dS = \mu S \cdot dt + \sigma S \cdot dZ$$

に従っているとき, 伊藤のレンマから株価 S による派生証券の価格 $f(S,t)$ の微分　df　は

$$df = \{\frac{\partial f}{\partial S} \cdot \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 S^2\}dt + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \sigma S \cdot dZ$$

に従う。

株価 S の株式を $\frac{\partial f}{\partial S}$ 単位買って、価格　$S(S,t)$ の派生商品を一単位売るときのポートフォリオ価格は,

$$\frac{\partial f}{\partial S} \cdot S - 1 \cdot f(S,t)$$

Δt 時間でのポートフォリオ変化量は,

*2

ˆ.500　NB. ln 500
6.21461

$$\frac{\partial f}{\partial S} \cdot \Delta S - 1 \cdot \Delta f$$

となる。この $\Delta S, \Delta f$ に伊藤のレンマを代入し、さらに, 非危険利子率　r　を加えて整理していくとブラックショウルズ偏微分方程式ができる。

ブラックショールズの偏微分方程式は

$$rf(S,t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + r\frac{\partial f}{\partial S}S$$

この式は, 株価 S の派生証券の価格を　$f(S,t)$ としたとき,　$f(S,t)$　が満たすべき偏微分方程式であり、これを解くことにより, 派生証券 (株価オプション）の価格評価公式が求まる。

3　ブラックショウルズ方程式の解

ブラック・ショールズ方程式は最後に次の式が解となる。

$$f(S,t) = S \cdot N(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x}) - Xe^{rx} \cdot N(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}})$$

これは、つぎのようにあらわすことが出来る.

$$C = S \cdot N(d1) - Xe^{-r(T-t)} \cdot N(d2)$$

$$u = \log\frac{S}{X} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)$$

$$d_1 = \frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

4　ブラックショールズのプログラム

ブラック・ショールズの計算には, 次の 5 のパラメーターが必要である。ボラティリティーは分散で, 日経新聞のオプション価格の欄から求める。

ヨーロピアン●コールオプションの価格を求める例

項目	記号	計算例
現在の株価	S	14500
権利行使価格	X	14000
オプションの期間	T	2 ヶ月
ボラティリティー	σ	38%
非危険利子率	r	6%

$T - t = \frac{2}{12} = 0.1667$
$u = \log\frac{S}{X} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) = \log\frac{14500}{14000} + (0.06 - \frac{0.38^2}{2}) * 0.1667 = 0.0331$
$\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x} = \frac{0.0331}{0.38 * \sqrt{0.1667}} + 0.38 * \sqrt{0.1667} = 0.3685$
$\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} = \frac{0.0331}{0.38 * \sqrt{0.1667}} = 0.2133$
標準正規分布の値を求める。
[3]

ここでは、

$$N(\frac{u}{\sigma\sqrt{X}} + \sigma\sqrt{x}), N(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}})$$

の値は, 鈴木義一郎「J 言語による統計解析　1996　森北出版」に左からの正規分布の値を求めるスクリプトの例があるので, これによった.

$N(0.3685) = 0.6437$

$N(0.2133) = 0.5845$

$f(S,t) = 14500 * 0.6737 - 14000 * e^{-0.06*0.1667} * 0.5845 = 1232.0844$

4.1 Script

```
NB. ========================================
NB. Black Scholes Model
NB. ========================================

NB. ************************************************
NB. Normal distribution
NB. Original script is written by G. Suzuki math p 81
NB. modifyed by M.Shimura
```

[3] 正規分布の数値表の値は本により, 左から求めるもの、右から, 中央からの 3 種類ある

```
NB. ***********************************************

 nd=:( % &( %: 2p1))&([: ^ [: - [: -: *:@])  NB. same as  ndens

 ndfs2=: 3 : 0
(-: h * (nd 0) + nd y. ) + h * +/ nd ( >: i.249) * h =. | y. % 250
)

ndf=: 0.5&+@(**ndfs2)



NB. ==========================================
NB. Black Scholes Model
NB. M.Shimura  Nov. 2000
NB. ussage: bs data
NB. data is list ( 5 block)
NB. 現在の株価 権利行使価格 オプションの期間（月）ボラティリティ（%） 非危険利子率（%）
NB. ex. data=. 14500 14000  2 38 6
NB. ==========================================
bs =: 3 : 0
'a b c d e'=. y.
t=. c % 12
u=. (^. a % b) +  t* (e1=.e % 100) - -:(bor=.d % 100) ^2
p2=. u % (bor * %: t)
p1=. p2 + bor * %: t
n1=.ndf p1
n2=. ndf p2
bs=. (a * n1 ) -  b *n2 *( ^ (-e1) * t)
bs
)
```

4.2 実行例

```
   ndf 0.3685
0.64375
```

```
   ndf 0.2133
0.584454

   bs 14500 14000 2 38 6
1233.08
```

References

石井至　「図解でわかる金融工学入門」日本能率協会マネージメントセンター　2000

石村貞夫　石村園子「金融・証券のためのブラック・ショールズ微分方程式」東京図書　1999