J 言語 ファーストブック (1)
アーメスからヴェイトまで

SHIMURA Masato
jcd02773@nifty.ne.jp

2013 年 6 月 27 日

目次

はじめに

加藤文元の「物語　数学の歴史」に「ギリシャ人は計算が上手くない」、「 哲学や数学者は死ぬほど暇で、一日中論理/証明や幾何を考えた」、「算盤代わりに幾何学を用いる」とあった。また、ケーブル TV の科学番組では「インドは商人の国で、計算を重視」と解説していた。ポントリャーギンの高校生向けの教科書「やさしい微積分」では微分積分の解説に、ニュートンやライプニッツの名前はまったく出てこない。これを**健忘的抽象化**というようだ。書店で何冊かの微分積分の本を手に取ったが、時代背景や数学の歴史に無頓着なものが多い。

「頭のよい人が揃って解決策が無いのですか」。ニュートン、ケインズを生んだ国の女王の金融危機の臨んで叱責は当を得ている。近代経済学は数学に多くを学んだが、バシュリエを無視し、今だに現象を説明する数学を得ていない。フオン・ノイマンは後のノーベル賞経済学者サミュエルソンのスタンダードとなった経済学の教科書をニュートン以前と評して推薦文を断ったようだ。

理論には考案者の名が冠されることが多いが、ピタゴラスの様に学派の主に奉られたり、ガウスやニュートンのように公開に慎重で誰かが発表した後で「後出し」をして、悶着を起こす場合もあり、また名を冠せられたからその人の考案と限らないものも多い。

古代の数学は相当難しく、ピラミッドを築いた国のエジプト分数からいきなり難解なアルゴリズムに出会う。教育の現場で限られた時間枠で順にやっていたらとても時間が足りないだろうが、抽象的に背景を抜きにテクニックを詰め込むことが数学嫌いを生み出していることも事実であろう。

配列計算言語の多くはインタプリッタなので簡潔にプログラムが書ける。更に J は高級電卓機能も備えており、容易に数式や理論を実行できる。時代に沿って数学を中心に一人一枚の名画をアルゴリズムを考えながら J 言語に習熟できるようにした。

第 1 章

古代から中世へ

1.1　アーメスのパピルス

BC1650 頃の神官の書記の新人教育のためにパピルスに書いたヒエログリフの文書には１３の数学問題が記されていた。盗掘の財宝のついでに持ち出されたエジプト数学の断片は、スコットランド人リンドが購入し、大英博物館に収まっている。

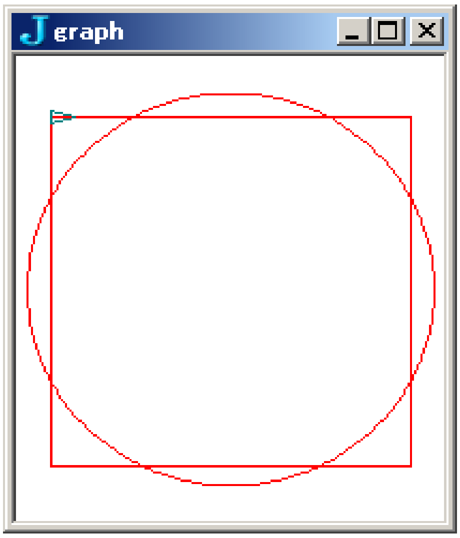
1.1.1　円の面積

直径 9 の円の面積は一遍 8 の正方形の面積と概ね等しい。
まだ円周率として独立はしてはいないが、中々の精度である

```
   4.5*4.5*1p1
63.6173
```

J はタートルグラフィックスが簡単に使えるのでこの図を描いてみよう。

```
require 'turtle'
show arcr 4.5 360                                  NB. 円弧 半径 4.5
show sq for 4                                      NB. 一辺が 4 の正方形
show arcr 4.5 360 pu fd 4 rt 90 fd 0.5 pdn sq for 8   NB. 重ねる
```




```
show
arcr 4.5 360        NB. arc r=4.5
pu                  NB. penup
fd 4 rt 90          NB. foward  rightturn
fd 0.5
pdn                 NB. pendown
sq for 8            NB. square l=8
```

1.1.2 エジプト分数

神とファラオへの奉仕として常時 1 万人がピラミッドの建設に従事した。ワーカーズ · ビレッジの遺跡も残されており、8 日働いて 2 日休み、病気なら 6 日休んだ。 報酬はまだ通貨が無いのでパンで支払われた。平等に分配しないと諍いが起こるので分数が登場した。エジプト分数は配分に適している。

資本主義初期の労働やウイナーテークオールの新自由主義より古代の方が優れた面も多い。

1. エジプト分数の方法。9 切れのパンを 10 人で分ける
   $\frac{9}{10}$ 程度だと一片を 10 等分してもよいが、もう少し数が増えるとエジプト分数のほうが効率がよい

```
   egyfrac 9r10
1r2 1r3 1r15

  +/ egyfrac 9r10
9r10
```

   (a) 9 個のパンを $\frac{1}{2}$ づつに分けるとは →5 個を半分づつ 10 人に分ければよい
   (b) 残り 4 個を各々 $\frac{1}{3}$ に割り 10 人で分ける → $\frac{2}{3}$ 残る
   (c) 1 個を $\frac{1}{15}$ に割る要領で → $\frac{2}{3}$ を 10 等分する
   (d) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{9}{10}$

2. アルゴリズムと経過

分数の逆数を求める	$\frac{9}{10} \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{\frac{9}{10}}} = \frac{10}{9}$	`% 9r10   -->    10r9`
Ceiling(切り上げ) の値を最初の分母にする	$1.111 \rightarrow \frac{1}{2}$	`>. 10r9  -->2`
目的の数から引く	$\frac{9}{10}-\frac{1}{2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$	
$\frac{2}{5}$ の逆数を求め、切り上げ。次の分母とする	$\frac{2}{5} \rightarrow \frac{5}{2} \rightarrow 3$	`% 9r10-1r2 -->5r2` `>. 5r2  --> 3`
$\frac{2}{5}$ から $\frac{1}{3}$ を引く。	$\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$	`2r5-1r3--> 1r15`
$\frac{1}{15}$ が出て、最後も単位分数になった	$\frac{9}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$	

3. Script

```
egyfrac =: 3 : 0
```

```
NB. written by NISHIKAWA Toshio /2008
NB. Usage: egyfrac 9r10 --> 1r2 1r3 1r15
Q =. y
S =. ''
while. Q ~: 0
  do.
    N =. >. 1 % Q
    S =. S, N
    Q =. Q - 1 x: 1 % N
end.
1 % x: S
)
```

1.1.3 J の作法

- $1p1 \leftarrow \pi$ として定義されており、1 個の数として用いることができる
  $1r3p1 \rightarrow \frac{1}{3}\pi \qquad 2p3 \rightarrow 2\pi^3$
- 1r3 は分数である。最近の数値計算言語は分数を用いて割り算をどこまでも通分し、最後に決められた表示形式で表示するものが多い。精度は上がるがメモリーに負担がかかる。

```
   1r3 * 2r4
1r6
```

- 割り算と逆数
  逆数は %　の単項型（左引数を取らない)。割り算は % の両項型

```
   % 9
0.111111
   1%9
0.111111
```

- 床と天井　整数化の時の切り下げと切り上げ

```
   (<. , >.) 2.23
2 3
```

1.2　バビロニア

4000 年前から栄えていたバビロニアでは何十万枚もの楔型文字を記した粘土板が発見されている。

1.2.1　60 進法

バビロニアは 60 進法を用いていた。YBC7289 といわれるイエール大学バビロニアコレクション 7289 番の粘土板はハムラビ王朝期のものである。
ここに 60 進法で $1; 24, 51, 10$ と記されている。

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1.41421$$

$\sqrt{2}$ の値で正方形の対角線即ちピタゴリアンの斜辺をあらわしている

J の作法

```
  1r60 1r60 1r60 1r60  #. 10 51 24 1
30547r21600
  _1 x: 1r60 1r60 1r60 1r60  #. 10 51 24 1
1.41421
12j10 ": _1 x:  1r60 1r60 1r60 1r60 #.|. 1 24 51 10
1.4142129630
```

- J の基底変換 Base (#.) Antibase (#:)
  60 進法から 10 進法への基底変換

```
 24 60 60 60 #:  86400 +61  NB. sec --> h hour min sec
0 24 1 1
```

- 60 進法は分母に作用するので 1r60 とする
- J はより高次の項が右側に来る。　$3 + 2x + 5x^2 + 7x^3$
- `_1 x:`　は実数で表記
- `12j10 ":`　12 桁、小数部 10 桁の文字列表示で丸めた数を指定桁数表示。数値化は（".）

1.2.2　シュメール人の $\sqrt{2}$

以下はシャトランによる。紀元前 2000 － 3000 年にシュメール人が用いていた。スミルナの *Théon* が 2 世紀に再発見したという。

$$\left\{\begin{array}{lll} x & \leftarrow & x+2y \\ y & \leftarrow & x+y \end{array}\right. \text{反復により}\frac{x^2}{y^2}\text{が 2 に近づく}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} u_0 & = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \\ u_1 & = \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix} u_{k-1}, \quad k \geq 1, \quad \text{っここで} \quad u_k = \begin{bmatrix}x^k\\y^k\end{bmatrix} \end{array}\right.$$

マトリクスの 2 を他の数を変更すれば他の平方根を求められる

```
(%/"1 a),.~a=.(1 2 ,:1 1)&(+/ . *)^:(i.10) 1 1

   1    1       1
   3    2     1.5
   7    5     1.4
  17   12 1.41667
  41   29 1.41379
  99   70 1.41429
 239  169  1.4142
 577  408 1.41422
1393  985 1.41421
3363 2378 1.41421
```

```
(%/"1 a),.~a=.(1 3 ,:1 1)&(+/ . *)^:(i.10) 1 1

    1    1       1
    4    2       2
   10    6 1.66667
   28   16    1.75
   76   44 1.72727
  208  120 1.73333
  568  328 1.73171
 1552  896 1.73214
 4240 2448 1.73203
11584 6688 1.73206
```

J の作法

- マトリクスの生成 (最下段の二組をラミネート (,:) で 2 行に組む。　後は、上に (,) で連結する）

```
   1 2 3,4 5 6,:7 8 9
1 2 3
4 5 6
7 8 9
```

- 内積演算 (+/ . *)　J は一般内積としてドット（.) の両側を任意の演算記号に取り替えることができる

```
   (1 2 3,: 4 5 6) +/ . * 7 8,9 10,:11 12
```

```
 58  64
139 154

  +/ 1 2 3 * 7 9 11
58
   +/ 4 5 6 * 8 10 12
154
```

- `^:(i.10)` 関数型定義でループを用いる　1 回から 9 回まで 10 ケースのループ計算を行う

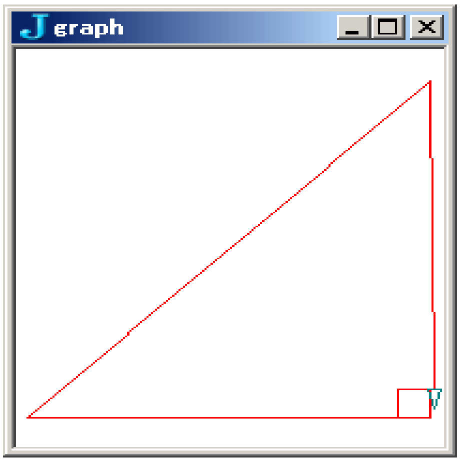
1.2.3　三角法

プリンプトン 322（コロンビア大学の G.A プリンプトンコレクション 322 番）と呼ばれるクレー板には三角法の記述があるようだ。
[*1]

$(c/a)^2$	b	c	No
(1 59 0)15	1 59	2 49	1

- 基底変換で 10 進数にする

```
   60 60 #. 1 59
119            NB. 底辺
   60 60 #. 2 49
169            NB. 斜辺
```



1 59　2 49 からもう一つのピタゴラス 3 数は 120 となる。

```
%: -/ ^&2] 169 119
          NB. 垂直の辺
120
```

- 60 進数は 2 通りある。

$1 \times 60 + 69 = 119$

$1 + \frac{59}{60} + \frac{5}{60^3} = 1.98336$

```
_1 x: 1r60 1r60 1r60 1r60 #. |. 1 59 0 5
```

[*1] 発掘後一部が行方不明になっている部分を推定している

```
1.98336
```

- 三角法の萌芽

```
  ^&2] 169%120
1.9834
```

大地に立てた芯柱と屋根・斜辺の比率 $\frac{1}{sinx} = cosec(x)$ である。J の円関数には *cosec* は入っていないが、$sin(x)$ の逆数である。プリンプトン 322 には 15 ケースの数値が角度順に並んでいる
[*2]

```
   169%120
1.40833

  % 1 o. rfd 45.24
1.40833
```

J の作法/J の円関数

1. 円関数は `o.` で 24 種類定義されている。(Help → Vocabulary) で確認。
2. $sin(x), cos(x), tan(x)$
   1 o. rdf 45 → $sin45^o$
   2 o. 1 → $cos(1)$ tan は 3
3. J の円関数はラディアンである。
4. `require 'trig'` には sin cos 等が定義されており、sin cos 等をそのまま使える。
5. rfd(radian from degree) dfr(degree from radian) は trig.ijs にある

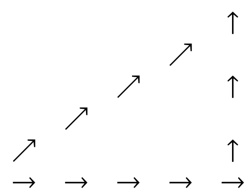
[*2] arcsin(x) とは異なる

1.3 ギリシャ人の数学

公理　ギリシャ人は自分たちの神を信じ、永遠を求めた。数学もギリシャ精神の一部である。公理と証明が導入された。証明の無い結論など無い。

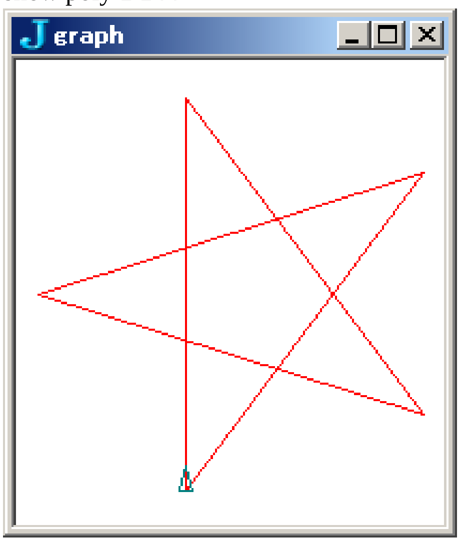
アメリカの独立宣言、スピノサのエティカ、アダムスミスの国富論、ニュートンのプリンキピアも公準体系で書かれている。

1.3.1 クロトンのピタゴラス学派



ピタゴラスは今のトルコと国境を接するサモス島で生まれた。BC529 年にイタリアの長靴の爪先に近いクロトンで学校 (教団）を開設した。

1. タートルグラフィックスでピタゴラス教団のマークを描いておこう
   show poly 1 144

2. 次の句は大英博物館に収められているバビロニアの粘土板に楔型文字で刻まれている。

   長さが 4 で対角線が 5。幅はいくつか？
   4 掛ける 4 は 16
   5 掛ける 5 は 25
   25 から 16 を引くと 9
   何と何を掛けると 9 になるか？
   3 掛ける 3 が 9
   従って幅は 3

3. 議論と抽象化と幾何好きのギリシャ人ピタゴラスはアレキサンドリアから帰国後は

エジプト縄をピタゴラスの定理に仕上げた。

$$a^2 + b^2 = c^2$$

4. 奇数の数によるピタゴラスの 3 組。　偶数は整数にならない

$$a, \frac{1}{2}(a^2 - 1), \frac{1}{2}(a^2 + 1)$$

```
pit=: 3 : 0
NB. Usage: pit 5
'a b c'=. y, -: ( ^&2 y) (-,+) 1
(a,b,c);c; %: +/ ^&2 a,b
)
```

```
  >pit L:0 {@> 5 6 7
+-----------+----+----+
|5 12 13    |13  |13  | NB. 5
+-----------+----+----+
|6 17.5 18.5|18.5|18.5| NB. 6
+-----------+----+----+
|7 24 25    |25  |25  | NB. 7
+-----------+----+----+
 a  b  c     c  sqrt a^2+b^2
```

5. 完全数
約数を足すと元の数になる神聖な数で、古代ギリシャでは最初の 4 個が知られていた。8128 を求めるのにも相当のエネルギーが必要。5 番目は 1456 年に求められた　33, 550, 336。

```
   perfect 1 10000
   6 1 2 3 0  0  0  0   0   0   0    0    0    0
  28 1 2 4 7 14  0  0   0   0   0    0    0    0
 496 1 2 4 8 16 31 62 124 248   0    0    0    0
8128 1 2 4 8 16 32 64 127 254 508 1016 2032 4064
```

今までに 43 個が知られている。5 番目でも高速 PC を長時間回さなければならない（スクリプトは区間を指定できるようにした）。奇数の完全数は見つかっていない。スクリプトは区間を指定できるようにしたが、原始的な総当り法である。高速アルゴリズムが求められる計算問題である。

```
perfect=: 3 : 0
NB.find  perfect numbers
NB. usage: perfect 1 10000
'a b'=. y
nr0=. a + i. >: b-a
ans=. 2 2 $ 0 0   NB. dummy
 for_ctr. i. >: b-a do.
  nr1=. ctr { nr0
  tmp0=. }:(-. * (>:i.nr1) | nr1 )# >:i.nr1 NB. calc yakusuu
  tmp1=. nr1 = +/ tmp0   NB. check perfect number
  if. 1 = tmp1 do. ans=. ans, (+/ tmp0),tmp0 end. NB. perfect --> write
 end.
2 }. ans    NB. drop dummy
)
```

1.3.2 エレアのツエノンのアキレスと亀

南イタリア · エレアのツエノンはアテネを訪れたとき、無限と離散に関する 4 つのパラドクスを提示して、何千年も哲学者や数学者を刺激した。

アキレスと亀のモデル .

アキレスは自分の前方を這い歩く亀を走って追い抜こうとするができない。なぜなら、彼は先ず亀が出発した位置につかねばならない。アキレスがそこに着いたときは、亀はもう出発しているから、まだ彼の前方にいる。この議論を繰り返せば、亀がいつもアキレスの前方にいることになる。

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots$	`x: %  >: i.  10` `1 1r2 1r3 1r4 1r5 1r6 1r7 1r8 1r9 1r10`

無限個の数を足し合わせても必ずしも無限となるわけではない。

無限（小）のパッキング .

- 次の無限小は一枚の紙をきっちり使い切ってパッキングできて、水平線として指標になる。しかし、収束と言えるまでには何回も折り紙を重ねなければならない。

```
 (i.10),. x: s0 10
0     1
1   1r2
2   1r4
3   1r8
4  1r16
5  1r32
6  1r64
7 1r128
8 1r256
9 1r512
```

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots$$

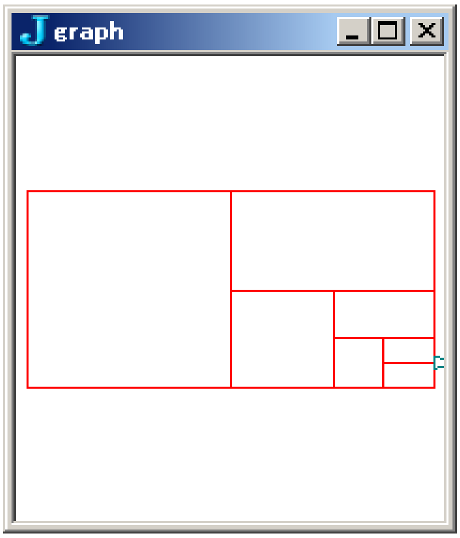
は収束する

- タートルグラフィックスでパッキングの図を描いてみよう

```
require 'turtle'

 show  calc_zenon1 5

calc_zenon1=: 3 : 0
NB. OK fine
NB. Usage: calc_zenon1 5
a=. % 2&^ i. y   NB. 1 1r2 1r4 1r8 ...
ans=. (sq for 1 lt 90) rt 180
for_ctr. i. <: y do.
 nr=. >: ctr
 t1=. bk (nr{a)  lt 90 fd (<: nr){a
 t2=. bk (nr{a)  rt 90 fd nr{a
ans=. ans,t1,t2
end.
)
```



- Script を作成し言語上の収束点を探す

```
    ( +/@: %@(2&^)@i."0 ) 10  20 30  40 43 44
1.99805 2 2 2 2 2
```

- 厳密に確認すると $\dfrac{1}{2^{54}}$ で 2 となる。（計算精度の設定で値は異なる）

```
  25j20 ": ,. ( +/@: %@(2&^)@i."0 ) tmp=. 10  20 30  40 50 54
10   1.99804687500000000000
20   1.99999809265136720000
30   1.99999999813735490000
40   1.99999999999818100000
50   1.99999999999999820000
53   1.99999999999999980000
54   2.00000000000000000000
```

- ここまで微細になると ～ は天秤で区別できない　→ 0 に納得しよう

1.3.3　ヒュッパソス

ピタゴラスの定理　$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ で $\alpha\beta$ を各々 1 とすると γ は $\sqrt{2}$ となる。幾何を中心とし、比例を重視するギリシャ数学にとって、無理数は致命傷であった。無理数を受け入れないピタゴラス教団によりヒュッパソスは船から落とされ溺死させられたと伝わる。

```
   %:2    NB. sqrt
1.41421

 30j25 ":  %: 2
```

```
1.4142135623730951000000000
```

この $\sqrt{2}$ の比率を黄金比に対して白銀比といい、日本の造形美に多く取り入れられているという。

1.3.4 アレキサンドリアのユークリッド

ギリシャ数学はピタゴラスからエウクレディス（ユークリッド）(BC325 頃-) に至って原論としてまとめられた。数学史上最大のベストセラーである。

エウクレディスは今のレバノンで生まれ、アテネの郊外にプラトンが創立したアカディメアで学び、アレキサンダー大王の征服からから凡そ 30 年後のプトレマイオス朝のアレキサンドリアのムセイオンという研究学術機関で最初の数学教授についた。

ユークリッドの互除法 .

240 と 55 の最大公約数		
$240 \div 55$	余り	20
$55 \div 20$	余り	15
$20 \div 15$	余り	5
$15 \div 5$	余り	0

GCD .

```
   240 +. 55  NB. +. GCD
5

   240 *. 55  NB. *. LCM
2640
```

```
euclid1=: 3 : 0
NB. u 240 55
c=. {. dat=. /:~  y  NB. up sort /c is dummy
ans=.2 3 $ 0,dat     NB. laminate and dummy for ans
while. c > 0 do.     NB. stop if c=0
c=.  |/ dat          NB. residue 55|240
ans=. ans,c,dat
dat=. c,{. dat
end.
}. ans
)
```

共通約数５で割り切れた

```
   euclid1 240 55
 0 55 240
20 55 240
15 20  55
 5 15  20
 0  5  15
```

最大公約数が 1 の場合　0 1 xx と最後に余りが 0 の時、共通因数が 1 になる場合は解が無い。

```
   euclid1 240 53
 0 53 240
28 53 240
25 28  53
 3 25  28
 1  3  25
 0  1   3
```

1.3.5　シラクサのアルキメデス

数学史家ペルはアルキメデスをニュートン、ガウスと並ぶ 3 大数学者と讃える。フィリーズ賞のメダルはアルキメデスのレリーフである。

当時のシチリア島のシラクサはギリシャ人の都市国家で、不幸にも膨張するローマ軍の進路にあった。僭主ヒエロンの求めに応じて天才軍事技術者でもあるアルキメデスは大型投石器を用いて 250kg の石を雨のように降らせ、大型レンズを組み合わせて軍船を焼いて奮戦し 3 年持ち応えたが虚を突かれて戦死した (75 歳)。BC212 年第 2 次ポエニ戦争時であった。

[*3]

- π
  アルキメデスは π を 96 角形を用いて計算し、内接円 $3\frac{10}{71}$ と外接円 $3\frac{10}{70}$ の間にあるとした。
  桜井進によると π は惑星探査機はやぶさでは 16 桁、砲丸の工場では 10 桁、陸上競技のトラックでは 5 桁が用いられているとのことである。アルキメデスと現代の π を各々 16 桁まで打ち出してみる。

```
  18j16 ":  (3&+ 10r71),1p1,: (3&+ 10r70)
3.1408450704225350  NB. 内接
3.1415926535897931  NB. はやぶさの精度
3.1428571428571428  NB. 外接
```

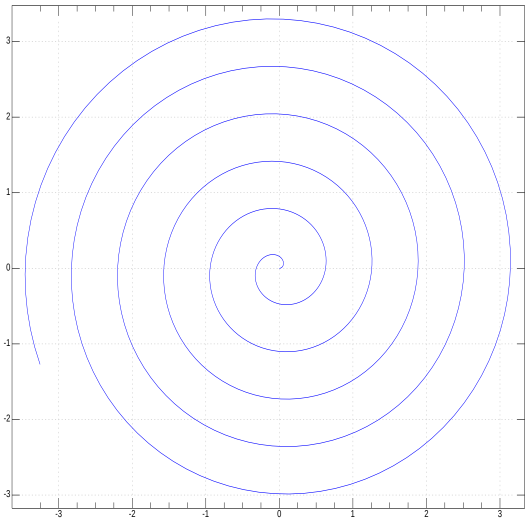
  π の計算は内接円と外接円を用いて、6 角形から始め 96 角形まで展開した。
- 取り尽くし法　アルキメデスは曲線や円錐、球の面積や体積を求めるのに、取り尽し法を完成させた。積分の始まりと言われている。

[*3] 投石器は日本の戦闘には登場しないし、アポリジニも用いる投槍器も使われていない。

- アルキメデス螺旋
  アルキメデスの父は天文学者で貴族。アルキメデスはアレキサンドリアへ遊学し、そこでアルキメデスの螺子と言われる揚水機を発明した。この原理は今も灌漑などに用いられている。

  ```
  plot { |:  0 archi_circ0 500
  ```

  縄をくるくるっと巻くとできる。




```
archi_circ0=: 4 : 0
NB. archimedes spiral
NB. Usage: (0/1/2) archi_circ0 1000/10000 etc.
N=. y  NB. 1000
select. x   NB. 0/1/2
case. 0 do.T=. 0.07 *  i.N       NB. Archimedes
case. 1 do. T=. (0.07 * i.N)^0.5 NB. Fermer
case. 2 do. T=. 0.07 * 3p1 * i. N  NB. * pi
end.
R=. 0.1 * T
xx=. R * cos T
yy=. R * sin T
xx,.yy
)
```

1.3.6 アレキサンドリアのエラトステネスの篩

エラトステネスはアルキメデスの師 (または友人）でアレキサンドリアの図書館長の数学者。

- n までの数の組み合わせで $m|n$ とし、剰余を求める。0 は割り切れる箇所

```
a |/ table a=. 2+i.10

+--+--------------------+
||/|2 3 4 5 6 7 8 9 10 11|
+--+--------------------+
| 2|0 1 0 1 0 1 0 1  0  1|
| 3|2 0 1 2 0 1 2 0  1  2|
| 4|2 3 0 1 2 3 0 1  2  3|
| 5|2 3 4 0 1 2 3 4  0  1|
| 6|2 3 4 5 0 1 2 3  4  5|
| 7|2 3 4 5 6 0 1 2  3  4|
| 8|2 3 4 5 6 7 0 1  2  3|
| 9|2 3 4 5 6 7 8 0  1  2|
|10|2 3 4 5 6 7 8 9  0  1|
|11|2 3 4 5 6 7 8 9 10  0|
+--+--------------------+
```

  - ある大きな数に含まれる素数 (n) を求めるには
  - 先ず 2 の倍数に印を付ける
  - 次に 3 の倍数に印を付ける
  - 4 は 2 の倍数なのでパスして
  - 5 の倍数に印をつける
  - n までの数で 1 回しか印がついていないのが素数

- 0 が 1 回の箇所を探す (素数)

```
   a,: +/  (|/~  a=.2+i.10)e. 0
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
1 1 2 1 3 1 3 2  3  1
```

- 100 までの素数

```
   (-.*<: +/  (|/~  a=.2+i.98)e. 0)# a
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97
```

１の箇所は１、他の箇所は０とする指標を作り、１の箇所のみコピーする

- J の組み込み関数

素数	p:	p: i.10 **先頭から 10 個の素数を打ち出す。p: 9 では 10 番目のみ** 2 3 5 7 11 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29
素因数分解	q:	q: 336 2 2 2 2 3 7 */ q: 336 336
素数の個数	m p: n	(p: i.5),: 5 q: 336 NB. **各素数の個数を求める** 2 3 5 7 11 4 1 0 1 0

1.3.7 ヘロンの公式

ヘロン（Heron BC100-AD100 の頃の人で数学者、測量などの技術者。水没したナイル河の耕地を上から見える畝の形からこの式を用いて計算し、租税減免に役立てた。

任意の三角形の 3 辺を a, b, c とすると三角形の面積 A は。

$$A = \sqrt{a(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

```
heron=: 3 : 0
NB. usage: heron 3 4  5
s=.-: +/ y
%: */ s,s-y
  )

heron0=:%:@( */)@:( s ,((s=.-:@(+/)) - ]))

   heron 3 4 5
```

6

ギリシャ社会の凋落

- 389 アレキサンドリアの図書館がローマによって焼かれ、50 万冊の文献が灰燼に帰す
- 415 頃　女性最初の数学者アレキサンドリアのヒュッパティアが民衆の投石で殺害される
- 529 皇帝ユスチアヌス　プラトンが創設したアテネのアカデミーを閉鎖
- 641 アラブ人がアレキサンドリアを征服　カリフの命令で図書館の残存物も完全に破壊

1.4 中国の数学

1.4.1 九章算術

中国の周や漢の時代凡そ BC100-AD200 頃の算術書

九章算術にある平方根の近似値を求める方法。

· $\sqrt{10}$ の近似値を求める方法

最初に近似値aとして 3 をとる	$a = 3$
a の 2 乗を 10 から引く	$10 - 3^2 = 1$
その結果を $2a$ で割り、b と置く	$b = \frac{1}{2 \times 3}$
同じ数を今度は $2a + b$ で割り、c と置く	$c = \frac{1}{6 + 1/6} = \frac{6}{37}$
c を使って $a + c$ とする	$3 + \frac{6}{37}$

```
   sqrt_china 10 3

3.16216
sqrt_china 10  3.16216   NB. 得られた値を再投入すると精度が上がる
3.16228

   %: 10
3.16228



sqrt_china=: 3 : 0
'f a0'=. y
b=. (a1=.  f- ^&2 a0) % +: a0
c=. a1 %  b + +: a0
a0+c
)
```

1.5　インドの数学

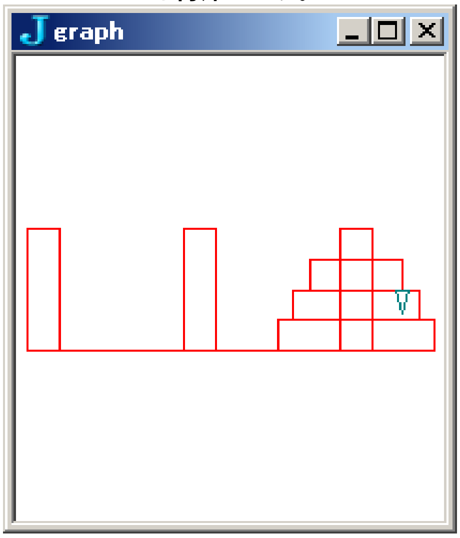
インドと言えば幾何学でなく商人の計算の国。インドの建物には０階がある。０の生まれた国。女神クリシュナの祭りの日の設定が天文学とインド数学の発展を促した。正は財産、負は負債、財産と負債が同じなら０。三角法はギリシャで生まれたが、インドで発達した。太陽までの距離は月の４００倍。

ハノイの塔　バラナシの寺院で６４枚の円盤と３本の支柱を使って、終末までの時を図る。

ハノイの塔のアルゴリズム

個数	プロセス	回数
2	1 2 1	3
3	1 2 1 **3** 1 2 1	7
4	1 2 1 **3** 1 2 1 **4** 1 2 1 **3** 1 2 1	15
5	1 2 1 **3** 1 2 1 **4** 1 2 1 **3** 1 2 1 **5** 1 2 1 **3** 1 2 1 **4** 1 2 1 **3** 1 2 1	31

個数を n とすると回数は $2^n - 1$ となる。円盤 2 個の軌跡を 3 個が前後に利用し、3 個の軌跡を 4 個が前後に利用すると簡潔に計算できる。このようなプロセスを効率的に利用するアルゴリズムを**再帰**という。




```
   2^64
1.84467e19
 x:  2^64
18446744073709551616
```

64 個の円盤で終末が計れるか?。兆で１２乗、京で１６乗であるので 1844 京となる。かのスパコンでも手強い。1 秒に 1 回円盤を動かすとすれば 5800 億年! インドの無限も奥が深い

```
   (<: 2^64) % 86400*365
5.84942e11
```

1.5.1　アールヤバター１世（476-550)

23 歳の時天文学と数学の書「アールヤバタの論考」を著した。当時の知識の整理と、自己の知見を纏めた簡潔な小冊子で著者が特定できるインド最古のもの。

- 0 を用いた 10 進表記で記述
- 等差数列の記述

$$1+2+3\cdots n=\frac{n(n+1)}{2}$$

```
   >:i.10
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
 +/  >:i.10
55
  -: 10*>:10
55
```

$$1^2+2^2+3^2\cdots n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

```
 +/ ^&2 >:i.10
385
 %&6 */ 10,(>:10),(>:+:10)
385
```

$$1^3+2^3+3^3\cdots n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

```
 +/ ^&3 >:i.10
3025
 ^&2 -: 10*>:10
3025
```

- 1975 のソ連の技術協力を得たインド最初の人工衛星にはアールヤバータの名が付けられた。[*4]

1.5.2　ブラーマグプタ (598-668)

30 歳の時に「ブラーマの改訂天文学体系」を現す。この時代までの集大成とブラーマの知見が加えられた。数値計算の父と言われている。0 は方程式に大きく寄与した。

- 0 とマイナスの計算規則

$$\frac{0}{0}=0$$

```
  0%0
0
```

$\frac{n}{0}$は 0 を分母とする分数。

後者は 12 世紀にバースカラ 2 世が無限大の概念を唱え訂正した

```
  3%0
_
```

*4 電源故障で 4 日で送信が不調となった

- 2 次方程式の解法

$ax^2 + bx + c$ の根は (負の数や無理数も正当な解とした）

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$$

- １次、２次不定方程式の解を得る（ペル方程式)
- ニュートン · ラフソン法に類似した反復解法を用いる
- ブラーマグプタの恒等式

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2(ad + bc)^2$$

1.6　アラビアの数学

- ピタゴラスやアルキメデスはアレキサンドリアへ遊学している。（プトレマイオス治下のギリシャ文明圏）
- ユークリッドの原論は 1,000 年後にアラビア語に訳されて、アラビア数学が隆盛した。貴重なギリシャの文献はアラビア語のみが残っているものも多い。

1.6.1　ムハンマド · イブン · ムーサー · アル · フワーリズミ

- アル · フワーリズミとはフワーリズムの人の意味。バクダッドの宮廷や天文台で仕事をし、850 年頃に没した
- 数学の著書「（アル ·) ジャブルとムカーバラの計算の抜書き」のアル · ジャブルがアルジェブラになり、この書からアル · フワーリズミがアルゴリズムの語源となった。アル · フワーリズミはかくの如く語りきと。
- ヒンズー教徒から *0* と *10* 進表記を学んで紹介した。

- ２次方程式を３の標準形に整理した。
  1. $x^2 + bx = c$
  2. $x^2 + a = bx$
  3. $x^2 = bx + a$

1.6.2　ウマル · アル · ハイヤーミー

詩人で数学者（1040 頃-1131)。

３次方程式の形式を１３種類に分類したようだが、解法はルネッサンスのイタリアでなされた。

- アル · フワーリズミの分類による 2 次方程式の解法。解は正の数のみで、負の数や複素数は用いない。

$$-39 + 10x + x^2 = 0$$

$$\begin{array}{ll}
x^2 + 10x = a & \\
\frac{1}{2}b = 5 & \frac{1}{2} \times 10 = 5 \\
\left(\frac{1}{2}b\right)^2 = 25 & 5 \times 5 = 25 \\
\left(\frac{1}{2}b\right)^2 + a = 64 & 25 + 39 = 64 \\
\sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 + a} = 8 & \sqrt{64} = 8 \\
\sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 + a} - \frac{1}{2}b = x = 3 & 8 - 5 = 3
\end{array}$$

- J による多項式の解法

```
   p. _39 10 1
+-+-----+
|1|_13 3|
+-+-----+
```

1.7 フィボナッチ

フィボナッチの本当の名はレオナルド · ダ · ピサ。ピサ出身のレオナルド (1170 頃-1250 頃)。父が現在のアルジェリアに仕事を求めたのに従いアラブ世界で最新の数学を学ぶ。1202 年に帰国し「算盤の書」を表し、アラビア数学を後進国ヨーロッパに広めた。

数式

$$F_n = \begin{cases} 0 & if \;\; n = 0 \\ 1 & if \;\; n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & if \;\; n > 1 \end{cases}$$

マトリックス · フォーム/Matrix form: .

$$\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \end{bmatrix}$$

Script .

```
   fib=:  (0 1,:1 1)&(+/ . *)
|:   fib ^: (i.16) 1 1
1 1 2 3 5  8 13 21 34 55  89 144 233 377 610  987
1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 1597
```

黄金比 フィボナッチ数から黄金数を求めることができる

$k \to \infty$, のとき $\frac{f_{k+1}}{f_k}$ は黄金比に近づく。

```
   a,. %/"1 a=. |."1 fib ^: (i.16) 1 1
   1   1       1
   2   1       2
   3   2     1.5
   5   3 1.66667
   8   5     1.6
  13   8   1.625
  21  13 1.61538
  34  21 1.61905
  55  34 1.61765
  89  55 1.61818
 144  89 1.61798
 233 144 1.61806
 377 233 1.61803
 610 377 1.61804
 987 610 1.61803
1597 987 1.61803
```

黄金比と固有値　固有値に黄金比が出る。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
   char_lf 0 1,: 1 1
+-+-----------------+-------+
|1|1.61803 _0.618034|_1 _1 1|
+-+-----------------+-------+
```

特性方程式 $y = -1 - x + x^2$ の解

```
  p. _1 _1 1
+-+-----------------+
|1|1.61803 _0.618034|
+-+-----------------+
```

[*5]

[*5] 左の 1 はシステムのリピート回数

第 2 章

ルネッサンスの時代

- 1453 年に東ローマがトルコに滅ぼされ、グレコローマのギリシャ文化が西側社会に流れ込んだ。
- グーテンベルグ (1398-1468)　活版印刷による（グーテンベルク）聖書の印刷（1455 年）。
- 1492 年にイスラム軍がアルハンブラ宮殿の鍵を渡して去って、スペインがカトリックに戻った
- 1492 ユダヤ商人の援助でユダヤ人コロンブスがスペインと 10 年あまり交渉し新大陸の副王の権利を獲得して、西回りの航海に出て、南北アメリカ大陸がヨーロッパ人の前に顕れた。

  1497　バスコ · ダ · ガマが喜望峰を回ってインドへ到達した。
- 1517　改革派マルチン · ルターターが張り出した一枚の紙（95 か条の論題）が宗教紛争を招き、多くのラテン語以外の諸国はバチカンから離れた。バチカンも大忙しで、混乱は包容力を無くして保守化し、大進化時代を迎えた科学との軋轢も激しかった。
- フィレンチェ近郊のビンチ村生まれの庶子レオナルドは 1619 年に南フランスで客死した。
- イングランドはチュウダ朝最後の女王エリザベスの時代 (在位 1558-1603) で父の始めた国教会が制度化された。

2.1　カルダノ、タルタリア、フェラーリ

· 1543　コペルニクス (1473-1543)　「天球の回転について]　出版

カルダノ (1501-1576) はギャンブラーで医者、数学者。生涯は波乱万丈。頭脳をギャンブルに使い、「さいころ遊びについて」という本を書き、**期待値**の考え方を提示したが、出版は死後の 1633 年。[*1]

この時代は**数学試合**が注目された。カルダノはタルタリアから 3 次方程式の解法を公開しないとの約束で教えてもらい約束を反故して 1545 年に「アルス · マグナ」の中で公開し、悶着を起こす。タルタリアもギャンブラーに只で教えるほどお人よしではなかろう

[*1] 完璧主義のニュートンやガウスは発見をなかなか出版せず、謂わばジャンケンの後出しで度々物議をかもし出した。

し、この解法は、タルタリアが 1537 年に書いた著書でも公開しておらず、公開する意思は無かったようだ。カルダノは 10 年経てから公開したが、カルダノが公開しなければ、タルタリアの功績は記録されず、後世のビッグネームに、手柄を横取り、独り占めにされたかもしれない。近頃はアルゴリズム特許などまた変なものが流行って来た。

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x = \begin{cases} -\dfrac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}} \\ -\dfrac{b}{3a} + \omega \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}} + \omega^2 \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}} \\ -\dfrac{b}{3a} + \omega^2 \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}} + \omega \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \\ p = \dfrac{c}{a} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 \\ q = \dfrac{d}{a} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{c}{a}\right) + \dfrac{2}{27}\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 \end{cases}$$

カルダノの弟子フェラリは４次式の公式を発見している。

2.2　フランソワ · ヴエイト（1540-1603)

ヴエイトはフランスの数学者のトップバッター。法律家でグレゴリオ暦の採用反対運動やコペルニクスの天動説にも反対した保守派。スペイン軍の暗号解読も行った。

2.2.1　ヴエイトの数学の功績

- 代数に記号を導入。その後デカルトが洗練した
  - 既知量を子音字で未知量を母音字で
  - $+, -, aequatur(=), quadratus(a^2), cubus(a^3)$
- 代数式に $\cdots(etcetra)$ を記入し無限の繰り返しを導入した

2.2.2　ヴエイトの $\dfrac{2}{\pi}$ の無限積

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

巧妙な級数式と π が表れている。

2.2.3　J の作法

1. 反復する J の関数。文字列にしておき、組み合わせてから数値化（ ".) する

```
f0=: ' %: 1r2 '
f1=:  ' + 1r2 * %: 1r2 '
```

2. アルゴリズム　反復のパターンを整理する

$\frac{2}{\pi}$		2%1p1 0.63662
$\sqrt{\frac{1}{2}}$	%: 1r2	". f0 0.707107
$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$	%: 1r2 + 1r2 * %: 1r2	". f0,f1 0.92388
$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$	%: 1r2 + 1r2 * %: 1r2 + 1r2 * %: 1r2	". f0,f1,f1 0.980785

3. 反復の構成と計算

```
 */ (". f0) , (".f0 , f1)
0.653281
 */ (". f0) , (".f0 , f1),(". f0,f1,f1)
0.640729
   */ (". f0) , (".f0 , f1),(". f0,f1,f1),(". f0,f1,f1,f1)
0.637644
   */ (". f0) , (".f0 , f1),(". f0,f1,f1),(". f0,f1,f1,f1),(". f0,f1,f1,f1,f1)
0.636876
```

4. 収束はそれほど早くないが、π を級数で表すことができた記念碑である

ルネッサンスの数学と音楽はまだ助走期で大きく花開くのはバロック時代から

References

E. オマール 伊理由美訳「不思議な数 e の物語」岩波書店 1999

E. オマール 伊理由美訳「ピタゴラスの定理」岩波書店 2008

F. シャトラン/伊理正夫、由美訳「行列の固有値」 Springer/Tokyo 1993/2003

イアン · スチュアート　水谷淳訳　「世界を変えた 17 の方程式」　SoftBank　 Creative 2013

E.T. ベル　田中勇　銀林浩訳　「数学を作った人びと 1,2,3」　早川書房　 2003

マイケル ·J· ブラッドリー　松浦俊輔訳　「数学を切り開いた人びと 1 」青土社　 2009

加藤文元　「物語　数学の歴史」　中公新書　 2007

土基善文 「ｘのｘ乗のはなし」日本評論社 2002

西沢清子 · 関口晃司 · 吉野邦生きる「フラクタルと数の世界」海文堂 1991

矢島祐利　「アラビア科学の話」岩波新書　 1965