多項式による補完とカーブフィッティング
アルゴリズムとプログラム

SHIMURA Masato
JCD02773@nifty.com
URL:http://homepage3.nifty.com/asagaya_avenue

2012 年 5 月 28 日

目次

はじめに

多項式による回帰は多項式の係数を求め、このモデルで一気に推計する。
ラグランジュ、ネビル、ニュートンの補完法は、全体のデータを補完に用いる
ピースワイズ法とスプライン補完は区間を区切り、補完する方法である。
多項式を眺めてその美しさと正当性を味わうことは大切であるが、
n が多い事例では、多項式を抽出するのも大変で、抽象的な数式を眺めてアルゴリズムを理解し更にプログラムに持ち込むのには苦労が伴う。
小さな数値例を元に手計算をしてみると、数式外のノウハウも幾らか必要である。下の

データを生かす補完と多項式で一気に推計するとカーブフィッティングとでは多少手法が異なる。本稿では補完を主とした。

1　ラグランジュ補完

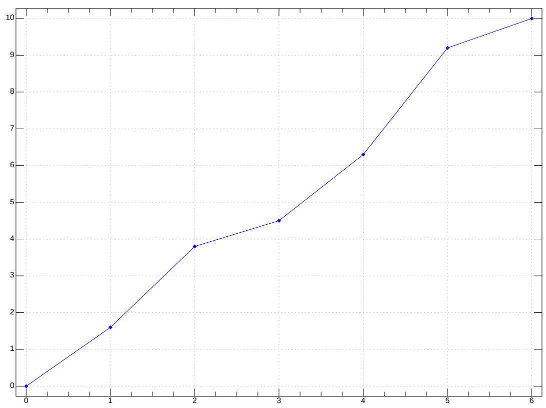
ラグランジュはマリー・アントワネットの数学の先生。サルジニア公国トリノの生まれ。ナポレオンが創立したエコール・ポリテクニークの創生期を担った。

ラグランジュ補完は原理を理解するのに都合が良いが、次数が増えるとうねりを生じる。

1.1　数値例

次の数値例はフレオン 12 の 400kPa での蒸気圧。(出典 Bradie Ex5.2)

$Pressure(kPa)$	$v_g(m^3/kg)$
308.6	0.055389
362.6	0.047485
423.3	0.040914
491.4	0.036413



```
'line marker' plot  {@|: EX1
  pd 'eps c:/temp/largange0.eps'
```

$$v_gP =$$

$$\frac{(P-362.6)(P-423.3)(P-491.4)}{(308.6-362.6)(308.6-423.3)(308.6-491.4)}0.055389$$

$$+\frac{(P-308.6)(P-423.3)(P-491.4)}{(362.6-308.6)(362.6-423.3)(362.6-491.4)}0.047485$$

$$+\frac{(P-308.6)(P-362.6)(P-491.4)}{(423.3-308.6)(423.3-362.6)(423.3-491.4)}0.040914$$

$$+\frac{(P-308.6)(P-362.6)(P-423.3)}{(491.4-308.6)(491.4-362.6)(491.4-423.3)}0.035413$$

$n = 4$ であるので 3 次の多項式を 4 個足し合わせたものになる。(数式展開はやればできる)

1.2 ラグランジュ補完の数式

数式では次のようになる

$$L_{n,j} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_J-x_n)}$$
$$= \Pi_{i=0,i\neq j}^{n} \frac{x-x_1}{x_j-x_i}$$

1.3 経過と解説

落しの指標 J に落しの指標が無いので作る。0 の箇所はコピーしない。

```
   1 pick_index i.4
1 0 1 1
```

```
pick_index =: -.@= i.@ #
```

指標の組合せ 各ボックスを 0,1,2,3 と順次落とす。(1 が copy)

```
  ({@> i.4) pick_index L:0 i.4
+-------+-------+-------+-------+
|0 1 1 1|1 0 1 1|1 1 0 1|1 1 1 0|
+-------+-------+-------+-------+


pick0=: 4 : '(x pick_index y) # y'                      NB. Copy
pickm=: 3 : '({@> y) - L:0  ({@> i. # y) pick0 L:0 y' NB. 分母
NB. compose bunbo/denominator
```

分母を構成 .

$$(308.6 - 362.6)(308.6 - 423.3)(308.6 - 491.4)$$
$$(362.6 - 308.6)(362.6 - 423.3)(362.6 - 491.4)$$
$$(423.3 - 308.6)(423.3 - 362.6)(423.3 - 491.4)$$
$$(491.4 - 308.6)(491.4 - 362.6)(491.4 - 423.3)$$

```
pickm {."1 EX53
```

```
+-----------------+---------------+----------------+----------------+
|_54 _114.7 _182.8|54 _60.7 _128.8|114.7 60.7 _68.1|182.8 128.8 68.1|
+-----------------+---------------+----------------+----------------+
```

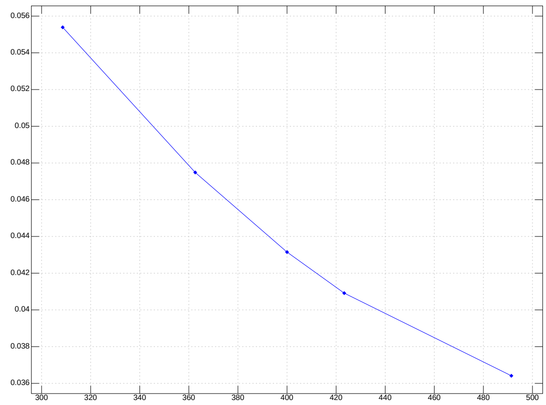
分子 $(P - x_n)$ の x_n の組合わせ

```
   pick1 X0
+-----------------+-----------------+-----------------+-----------------+
|362.6 423.3 491.4|308.6 423.3 491.4|308.6 362.6 491.4|308.6 362.6 423.3|
+-----------------+-----------------+-----------------+-----------------+

pick1=: 3 : '({@> i. # y) pick0 L:0 y'
```

400 **を補完**　plot 用にソートもする

```
   400  lagrange_ip EX53
308.6  0.055389
362.6  0.047485
  400 0.0431489
423.3  0.040914
491.4  0.036413
```



```
'line marker' plot   400 Lagrange_ip EX1
  pd 'eps c:/temp/largange0.eps'
```

Script　.

```
NB. ----------Lagrange interpolation ---------------
pick_index =: -.@= i.@ #
NB.     1 pick EX1
NB. 1 0 1 1 1 1 1

pick0=: 4 : '(x pick_index y) # y'
NB. 1 pick0 EX52
```

```
pick1=: 3 : '({@> i. # y) pick0 L:0 y'
NB. souatari
pickm=: 3 : '({@> y) - L:0  ({@> i. # y) pick0 L:0 y' NB. Bunbo
NB. compose bunbo/denominator

lagrange_ip=: 4 : 0
NB. Lagrange interpolation and sort
NB. x is interpolation point // y is EX1
NB. Usage: 400 lagrange_ip EX53
'X0 Y0'=: {|: y                                    NB. rotate
DENOMI=. pickm X0                                  NB. bunbo/denominator
NUMER=. pick1 X0                                   NB. bunsi/numerator
ANS=.+/ Y0* ;(*/ L:0 x - L:0 NUMER) % L:0 */ L:0 DENOMI NB.Y0*(P-xn)/DENOMI
)

lagrange_sort=: 4 : '(/: {"1 TMP1) { TMP1 =. y , x, x calc_lagrange y'
NB. sort for plot
NB. Usage: 1.5 lagrange_sort EX55
```

2 ネビルのアルゴリズム

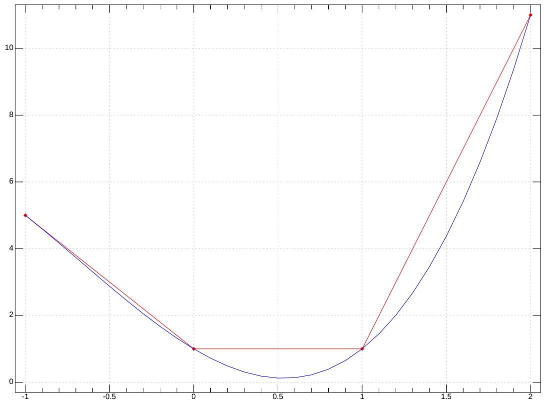
2.1 アルゴリズムと数値例

次の例で $x = 1.5$ に補完する

Example

```
neville_ip plot_round_calc EX55
  pd 'eps c:/temp/neville0.eps'
```

```
  EX2
 x  y
_1  5
 0  1
 1  1
 2 11
```



$x_0 = -1$	$P_0(1.5) = 5$			
$x_1 = 0$	$P_1(1.5) = 1$	$P_{0,1}(1.5) = -5$		
$x_2 = 1$	$P_2(1.5) = 1$	$P_{1,2}(1.5) = 1$	$P_{0,1,2}(1.5) = 2.5$	
$x_3 = 2$	$P_3(1.5) = 11$	$P_{2,3}(1.5) = 6$	$P_{1,2,3}(1.5) = 4.75$	$P_{0,1,2,3}(1.5) = 4.375$

$x(1.5) = 4.375$

計算の過程 .

- 1 回目

$$P_{0,1}(1.5) = \frac{(1.5 - x_0)P_1(1.5) - (1.5 - x_1)P_0(1.5)}{x_1 - x_0} = \frac{2.5 \times 1 - 1.5 \times 5}{1} = -5$$

$$P_{1,2}(1.5) = \frac{(1.5 - x_1)P_2(1.5) - (1.5 - x_2)P_1(1.5)}{x_2 - x_1} = \frac{1.5 \times 1 - 0.5 \times 1}{1} = 1$$

$$P_{2,3}(1.5) = \frac{(1.5 - x_2)P_3(1.5) - (1.5 - x_3)P_2(1.5)}{x_3 - x_2} = \frac{0.5 \times 11 - (-0.5) \times 1}{1} = 6$$

- 2 回目

$$P_{0,1,2}(1.5) = \frac{(1.5 - x_0)P_{1,2}(1.5) - (1.5 - x_2)P_{0,1}(1.5)}{x_2 - x_0} = \frac{2.5 \times 1 - 0.5 \times -5}{2} = 2.5$$

$$P_{1,2,3}(1.5) = \frac{(1.5 - x_1)P_{2,3}(1.5) - (1.5 - x_3)P_{1,2}(1.5)}{x_3 - x_1} = \frac{1.5 \times 6 - (-0.5) \times 1}{2} = 4.75$$

- 3 回目

$$P_{0,1,2,3}(1.5) = \frac{(1.5 - x_0)P_{1,2,3}(1.5) - (1.5 - x_3)P_{0,1,2}(1.5)}{x_3 - x_0} = \frac{2.5 \times 4.75 - (-0.5) \times 2.5}{3} = 4.375$$

2.2　数式とアルゴリズム

$$\begin{array}{lllll}
x_0 & f_0 = P_0(\overline{x}) & & & \\
x_1 & f_1 = P_1(\overline{x}) & P_{0,1}(\overline{x}) & & \\
x_2 & f_2 = P_2(\overline{x}) & P_{1,2}(\overline{x}) & P_{0,1,2}(\overline{x}) & \\
x_3 & f_3 = P_3(\overline{x}) & P_{2,3}(\overline{x}) & P_{1,2,3}(\overline{x}) & P_{0,1,2,3}(\overline{x}) \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

$P_{1,2,3}(\overline{x})$ の場合

$$P_{1,2,3}(\overline{x}) = \frac{(\overline{x} - x_i)P_{2,3}(\overline{x}) - (\overline{x} - x_3)P_{1,2}(\overline{x})}{x_3 - x_0}$$

$$P_{m1,m2,m3,\cdots,mk}(\overline{x}) = \frac{(x - x_{m1})P_{m2,m3,m4,\cdots,mk} - (x - x_{mk})P_{m1,m2,m3,\cdots,mk-1}(x)}{x_{mk} - x_{m1}}$$

2.3　経過と解説

分母の構成　$x_n - x_{n-1}$

```
   2 rot_dat {."1 EX55
+----+---+---+
|0 _1|1 0|2 1|
+----+---+---+

|. (L:0) 2<\ y
```

Neville の階段　.

```
     1.5 calc_neville EX55
```

```
 _1  5  0    0     0
  0  1 _5    0     0
  1  1  1  2.5     0
  2 11  6 4.75 4.375
```

sort .

```
     1.5 neville_sort EX55
 _1     5
  0     1
  1     1
1.5 4.375
  2    11
```

2.4 Script

```
calc_neville=: 4 : 0
NB. Usage: 1.5  neville EX2
IP=: x                                NB. interpolation point
'X0 Y0'=: { |: y
ANS=. |: y
Y1=. 2 rot_dat Y0
NB. -----------Loop-------------------------
for_ctr. i.  <: # y do.                NB. ctr origin=0
 ctr=. >: ctr                         NB. adjust counter
 X1=. (0 ,ctr ){ (L:0) (>:ctr)<\ X0   NB. compose X1
 NIP=. IP calc_neville_sub (<X1),<Y1  NB. calc main
 Y1=. 2 rot_dat ;NIP                  NB. compose Y1
 ANS=. ANS, (((# y)-(# NIP))#0),;NIP
end.
|: ANS
)
```

```
rot_dat=: 4 : '|. L:0 x<\ y'

calc_neville_sub=: 4 : 0
'X1 Y1'=. y
IP=. x
-/ L:0 (Y1* L:0  IP- L:0 X1) % L:0 -/ L:0 |. L:0 X1
)
```

3 Newton 補完

例題 Neville と同じ EX2

$$\begin{array}{ccccc}
x_0=-1 & f[x_0]=5 & & & \\
 & & f[x_0,x_1]=-4 & & \\
x_1=0 & f[x_1]=1 & & f[x_0,x_1,x_2]=2 & \\
 & & f[x_1,x_2]=0 & & f[x_0,x_1,x_2,x_3]=1 \\
x_2=1 & f[x_2]=1 & & f[x_0,x_1.x_2]=5 & \\
 & & f[x_2,x_3]=10 & & \\
x_3=2 & f[x_3]=11 & & &
\end{array}$$

- 1st divided differences

$$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}=\frac{1-5}{0-(-1)}=-4$$

$$f[x_1,x_2]=\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}=\frac{1-1}{1-0}=0$$

$$f[x_2,x_3]=\frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}=\frac{11-1}{2-1}=10$$

- 2nd divided differences

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{0-(-4)}{1-(-1)}=2$$

$$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}=\frac{10-0}{2-0}=5$$

- 3rd divided differences

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0} = \frac{(5-2)}{2-(-1)} = 1$$

Newton **多項式** .

$$\begin{aligned} P_{0,1,2,3}(x) &= f[x_0] \\ &+ f[x_0,x_1](x-x_0) \\ &+ f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ &+ f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \end{aligned}$$

$$= 5 - 4(x+1) + 2(x+1)x + (x+1)x(x-1)$$

補完の解

$$P_{0,1,2,3}(1.5) == 5-4(1.5+1)+2(1.5+1)(1.5)+(1.5+1)(1.5)(1.5-1) = 5-10+7.5+1.875 = 4.375$$

3.1 数式とアルゴリズム

$$\begin{array}{cccccc} & 0th & 1st & 2nd & 3rd \\ x_0 & f[x_0] & & & \\ & & f[x_0,x_1] & & \\ x_1 & f[x_1] & & f[x_0,x_1,x_2] & \\ & & f[x_1,x_2] & & f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\ x_2 & f[x_2] & & f[x_1,x_2,x_3] & \\ & & f[x_1,x_2] & & \\ x_3 & f[x_3] & & & \end{array}$$

3.2 経過と解説

```
   calc_newton EX55
_1   5   0 0 0
 0   1 _4 0 0
 1   1   0 2 0
 2  11  10 5 1

   1.5 newton_ip EX55
 _1     5
```

```
  0     1
  1     1
1.5 4.375
  2    11
```

4　ピースワイズ法

ピースワイズ法とスプライン補完はデータから区間を区切ってその区間内で補完関数を求める方法である。

4.1　数値例

```
   EX514
  0 0.89
 20 1.40
 40 2.51
 60 5.37
 80 17.4
100 24.2
```

$$a_0 = 0.89 \quad b_0 = \frac{1.40 - 0.89}{20}$$

$$a_1 = 1.40 \quad b_0 = \frac{2.51 - 1.40}{20}$$

$$a_2 = 2.51 \quad b_2 = \frac{5.37 - 2.51}{20}$$

$$a_3 = 5.37 \quad b_3 = \frac{17.4 - 5.37}{20}$$

$$a_4 = 17.4 \quad b_4 = \frac{24.2 - 17.4}{20}$$

$$viscosity/\text{粘性} = \begin{cases} 0.89 & +0.0244C & , \quad 0 \le C < 20 \\ 1.409 & +0.0555(C-20) & , \quad 20 \le C < 40 \\ 2.51 & +0.143(C-40) & , \quad 40 \le C < 60 \\ 5.37 & +0.6015(C-60) & , \quad 60 \le C < 80 \\ 17.4 & +0.34(C-80) & , \quad 80 \le C < 100 \end{cases}$$

補完

$$\begin{array}{r|cc} 5\% & 0.89 + 0.0244(5) & = 1.0175 \\ 63\% & 5.37 + 0.6015(63-60) & = 7.1745 \\ 85\% & 17.4 + 0.34(85-80) & = 19.1 \end{array}$$

4.1.1　数式

$$f(x_i) = a_i$$

$$a_i + b_i(x_{i+1} - x_i) = a_{i+1}$$

$$b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{x_{i+1} - xi} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x)}{x_{i+1} - x_i}$$

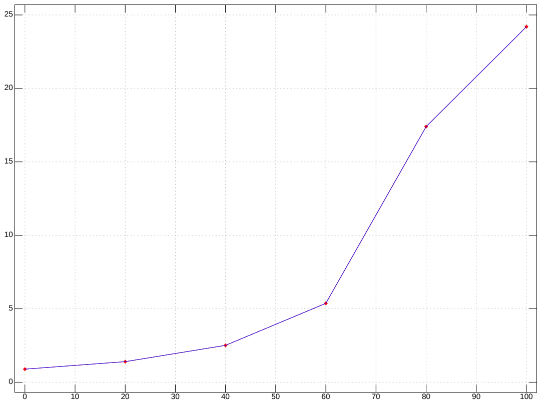
4.2 経過と解説

```
   calc_piecewise EX514
0.89 0.0255
 1.4 0.0555
2.51  0.143
5.37 0.6015
17.4   0.34
```

```
calc_piecewise=: 3 : 0
NB. Usage:  calc_piecewise EX514
NB. Y0+PARAM(C-0 20 40..)
'X0 Y0'=. {|: y
NUME =. ;-/ (L:0) 2 rot_dat Y0  NB. numerator
DENOM=. ;-/ (L:0) 2 rot_dat X0  NB. denominat
PARAM=. NUME % DENOM            NB. parameter
(}:Y0),.PARAM
)
```

```
piecewise=: 3 : 0
NB. u EX514
'X0 Y0'=. {|: y
PARAM=. {: |:  calc_piecewise y
RANGE=.}. L:0 }: L:0 X1=. steps (L:0) (2<\ X0) , (L:0) 10 NB. divide by 10
TMP=.  ({@> }: Y0)+ L:0 ({@> PARAM) * L:0 RANGE - L:0  }: {@> X0
TMP=. (;({@> }: Y0) , L:0 TMP),{:Y0  NB. Y0+PARAM(C-0 20 40..)
(~.;X1),.TMP
)
```

```
 plot_piecewise EX514
   pd 'eps c:/temp/piecewise0.eps'
```



5　スプライン補完

Snezhana Gocheva=Ilieva の *[Spline interpllation]* に丁寧な例題と解説があるのでこれに依った。

1 次 *(Linear)*、*2* 次 *(Quadratic)* は *3* 次 *(Qubic)* の理解のための教材として有用である。

5.1　Linear Spline

- 数式

$$S_1(f,x) = \begin{cases} f_1 = a_1 + b_1(x - x_0) & , \quad x \in [x_0, x_1] \\ \vdots & \\ f_i = a_i + b_i(x - x_{i-1}) & , \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \vdots & \\ f_n = a_n + b_n(x - x_{n-1}) & , \quad x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

- 係数

$$a_i = y_{i-1}$$

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \quad , \qquad i = 1, n$$

- 経過と解説
  1. 数値例

     EXG

     x　y

```
  3 2.5
4.5   1
  7 2.5
  9 0.5
```

2. $h_i = x_{i+1} - x_i$

```
   |. (L:0)  2<\ {."1 EXG
+-----+-----+---+
|4.5 3|7 4.5|9 7|
+-----+-----+---+
```

3. $y_{i+1} - y_i$

```
  |. (L:0)  2<\ {:"1 EXG
+-----+-----+-------+
|1 2.5|2.5 1|0.5 2.5|
+-----+-----+-------+
```

4. a_i, b_i を求める

```
   calc_Linear_spline EXG

ai  bi
2.5  _1
  1 0.6
2.5  _1
```

```
calc_Linear_spline=: 3 : 0
NB. u EXG
'X0 Y0'=: {|: y
'X1 Y1' =: > pick2 L:0 X0;Y0
Bi=. ;(pick2 Y0) % L:0 pick2 X0
(}: Y0),. Bi
)

pick2=: 3 : ' -/ L:0 |. (L:0) 2<\ y' NB. x1
```

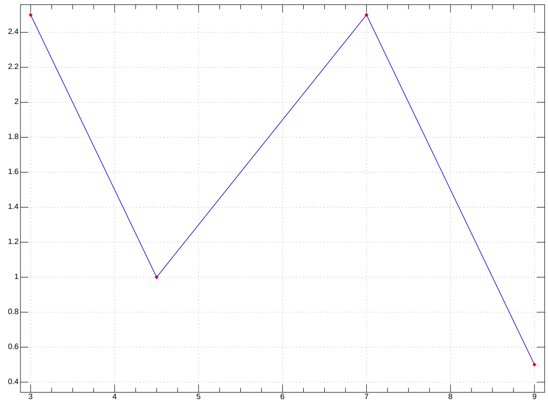
5. 区間と関数

i	a_i	b_i	$S_1(f,x)$		
1	2.5	−1	$f_1 = 2.5 - (x-3)$	,	$x \in [3; 4.5]$
2	1	0.6	$f_2 = 1 + 0.6(x-4.5)$	,	$x \in [4.5; 7]$
3	2.5	−1	$f_3 = 2.5 - (x-7)$	,	$x \in [7; 9]$

$f_2(5) = 1 + 0.6(5-4.5) = 1.3$

- 補完とグラフ

```
Linear_spline  plot_spline EXG
  pd 'eps c:/temp/splineL0.eps'
```



5.2 Quadratic Spline

$$S_2(f,x) = \begin{cases} f_1 = a_1 + b_1(x - x_0) + c_1(x - x_0)^2 & , \quad x \in [x_0, x_1] \\ \vdots & \\ f_i = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 & , \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \vdots & \\ f_n = a_n + b_n(x - x_{n-1}) + c_n(x - x_{n-1})^2 & , \quad x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_i &= y_{i-1} \\ b_1 &= \gamma_1 \\ b_i &= -b_i + 2\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \\ c_i &= \frac{b_{i+1} - b_i}{2h_i} \qquad , \qquad i = 1, n \end{aligned}$$

1. $b_i = \gamma_1 = 0$ とする。 この手法を *natural* という

```
    calc_quadratic_spline EXG
  ai  bi  ci
2.5   0 _0.666667
  1  _2      1.04
2.5 3.2      _2.1
```

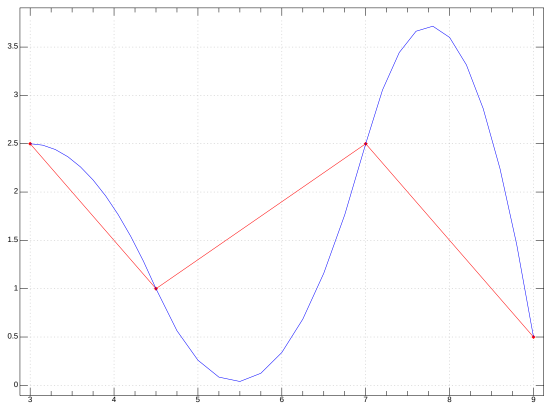
2. 係数と式

i	a_i	b_i	c_i	$S_2(f,x)$		
1	2.5	0	−0.666667	$f_1 = 2.5 - 0.666667(x-3)^2$	,	$x \in [3;4.5]$
2	1	−2	1.04	$f_2 = 1 - 2(x-4.5) + 1.04(x-4.5)^2$	,	$x \in [4.5;7]$
3	2.5	3.2	−2.1	$f_3 = 2.5 + 3.2(x-7) - 2.1(x-7)^2$	,	$x \in [7;9]$
4		−5.2				

b_i は *1* 項多く計算する

$$f(5) = 1 - 2(5-4.5) + 1.05(5-4.5)^2 = 0.26$$

```
quadratic_spline plot_spline EXG
  pd 'eps c:/temp/splineq0.eps'
```



2 次スプラインは大きく変異する。デザインには向いているかも

5.3 Qubic Spline

3 次のスプライン関数は線形システムで表現できる

$$S_3(f,x) = \begin{cases} f_1 = a_1 + b_1(x-x_0) + c_1(x-x_0)^2 + d_1(x-x_0)^2 & , \quad x \in [x_0, x_1] \\ \vdots & \\ f_i = a_i + b_i(x-x_{i-1}) + c_i(x-x_{i-1})^2 + d_i(x-x_i)^2 & , \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \vdots & \\ f_n = a_n + b_n(x-x_{n-1}) + c_n(x-x_{n-1})^2 + d_n(x-x_n)^2 & , \quad x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

$$a_i = y_{i-1}$$

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(l_{i+1} + 2l_i) \qquad , \qquad i = 1, n$$

$$c_i = \frac{l_i}{2}$$

$$d_i = \frac{l_{i+1} - l_i}{6h_i} \qquad , \qquad i = 1, n-1$$

$$\begin{bmatrix} l_1 & & & & & \\ h_1 l_1 & +2(h_1 + h_2 l_2) & +h_2 l_2 & & & \\ \cdots & & & & & \\ & h_{i-1} l_{i-1} & & +2(h_{i-1} + h_i l_i) & +h_i l_{i+1} & \\ \cdots & & & & & \\ & & & & & l_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ 6\left(\frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1}\right) \\ \cdots \\ 6\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right) \\ \cdots \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

1. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ とする *spline* は *natural* という。*2* 本の式が消え、マトリクスは縮小する。

2. マトリクスを作成

```
   mk_mat0 EXG
  8 2.5
2.5   9

   mk_vc0 EXG
9.6 _9.6
```

$$\begin{bmatrix} 8 & 2.5 \\ 2.5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 9.6 \\ -9.6 \end{matrix}$$

3. l_i を求める

```
calc_sp3c EXG
1.67909 _1.53308
```

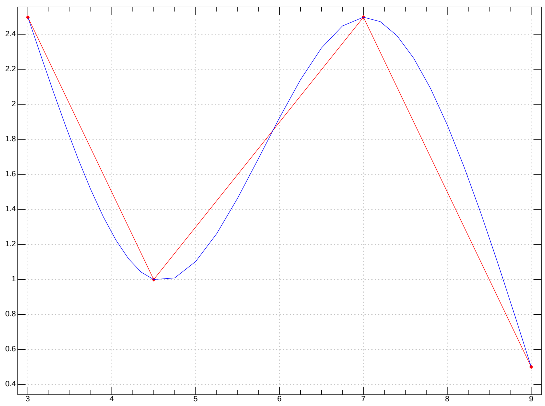
4. 係数を求める

```
calc_cubic_spline EXG
li      ai      bi           ci      di
      0 2.5  _1.41977         0   0.186565
1.67909   1 _0.160456 0.839544 _0.214144
_1.53308 2.5 0.0220532 _0.76654  0.127757
```

1	0	2.5	−1.41977	0	0.186565
2	1.67909	1	−0.160456	0.839544	−0.214144
3	−1.53308	2.5	0.0220532	−0.76654	0.127757

$$
\begin{array}{llllll}
f_1 = & 2.5 & -1.41977(x-3) & & +0.186565(x-3)^3 & , \quad x \in [3;4.5] \\
f_2 = & 1 & -0.160456(x-4.5) & +0.839544(x-4.5)^2 & -0.214144(x-4.5)^3 & , \quad x \in [4.5;7] \\
f_3 = & 2.5 & +0.0220532(x-7) & -0.76654(x-7)^2 & +0.127757(x-7)^3 & , \quad x \in [7;9]
\end{array}
$$

```
cubic_spline plot_spline EXG
  pd 'eps c:/temp/splinec0.eps'
```



5. *Script*

```
mk_mat0=: 3 : 0
'X0 Y0'=: {|: y
'X1 Y1' =: >pick2  L:0 X0;Y0
TMP0=:;("1) >({.; +:@:+/ ;{:) (L:0) 2<\X1
NB. TMP1=:  }."1 (-i.# TMP0)|."0 1 TMP0   NB. cut L0=0 and Ln=0
IND=. (TMP1), <: TMP1=. (# TMP0)
NB. }:@ }."1 (-i.# TMP0 )|."0 1  TMP1=:  TMP0,.(3 2 $ 0)
}:@}."1  (-i.# TMP0)|."0 1  TMP0,. IND$0
```

```
NB. IND=. - i. <: # X0
NB. 0,(IND |."0 1 TMP2),0
)

mk_vc0=: 3 : 0
'X0 Y0'=: {|: y
'X1 Y1' =: > pick2 L:0 X0;Y0
6*; -/ (L:0) |.(L:0)  2<\ Y1%X1
)

calc_sp3c=: mk_vc0 %. mk_mat0 NB. calc c
NB. Usage:  calc_sp3c EXG

calc_cubic_spline=: 3 : 0
NB. u EXG
'X0 Y0'=: {|: y
'X1 Y1' =: > pick2 L:0 X0;Y0
Li=: 0,~ 0, calc_sp3c y   NB. li / add 0 to each side
Ai=: }: Y0                NB.
Bi=. (Y1%X1)-(X1%6)* ; +/ (L:0) 2 1 * (L:0)2<\ Li
Ci=. -: Li                NB. Li/2
Di=. (; -/@:|.( L:0) 2<\ Li) % 6*X1
(}:Li),.Ai,.Bi,.(}:Ci),.Di   NB. Li Ai Bi Ci Di
)
```

References

Brian Bradie Numerical Analysis (Pearson Education Inc) 2006

Snezhana Gocheva-Ilieva [Spline interpllation]

J602 は http://www.jsoftware.com から *DL* できます。*Win32/64 Mac/PPC/Intel Linux32/64* などがあります

J のソースコードは

`http://japla.sakura.ne.jp` の *workshop May/2012* から *DL* してください