

破産問題 (ruin problem)

統計数理研究所(名誉教授) 鈴木義一郎

甲の所持金を a、乙の所持金を b とし、甲が乙に勝つ確率を p とする。そこでまず、「甲がいずれは破産してしまう確率」は

$$R(p; a, b) = \frac{(q/p)^{a+b} - (q/p)^a}{(q/p)^{a+b} - 1} (p \neq q)$$

$$= 1 - a/(a+b) (p = q)$$

のように与えられる。

甲が b の利得を得る前に、n 回目で破産する確率を $R_n(p; a, b)$ とすると

$$R_{n+2k}(p; a, b) = C(k; a, b) p^k q^{m+k}$$

ここで係数の間には次のような《漸化関係》が成り立つ。

$$C(k+1; a, c-a) = C(k; a+1, c-a-1) + C(k+1, a-1, c-a+1)$$

$$C(0; a, c-a) = 1, \quad C(1; c-1, 1) = a-1, \quad C(1; a, c-a) = a (a \leq c-2)$$

$$C(k; 0, c) = C(k, c, 0) = 0 (2 \leq a \leq c-2)$$

<pre> ruin_u=:4:0 if.x=0.5 do.1-({.%+/)y else.r=(-.%)]x (s-r^{.y}%(s=.r^{+/y)-1 end.) NB. ultimate ruin probability </pre>	0.5 ruin_u 1 9	0.4 ruin_u 1 9
	0.9	0.991176
	0.5 ruin_u 5 5	0.6 ruin_u 1 9
	0.5	0.660784

0.4 ruin_u 2 8 0.977941	0.4 ruin_u 6 4 0.816631	0.6 ruin_u 2 8 0.43464	0.6 ruin_u 6 4 0.0716932
0.4 ruin_u 3 7 0.958087	0.4 ruin_u 7 3 0.716122	0.6 ruin_u 3 7 0.283878	0.6 ruin_u 7 3 0.041913
0.4 ruin_u 4 6 0.928307	0.4 ruin_u 8 2 0.56536	0.6 ruin_u 4 6 0.183369	0.6 ruin_u 8 2 0.0220595
0.4 ruin_u 5 5 0.883636	0.4 ruin_u 9 1 0.339216	0.6 ruin_u 5 5 0.116364	0.6 ruin_u 9 1 0.00882378

やや不利な勝負では、所持金を増やしても破産の確率はなかなか小さくならない。多少有利な勝負では、所持金を増やしていけば、破産の確率はどんどん小さくなる。

n回目で破産する確率を $R_n(p; a, b)$ を算出する関数 :

```
sub={.+[:2&]}
```

```
next:0;[:],1;(sub,(2:))^(#-2:)
```

```
coef=4 :?}.[:next^(i.x)0,(<y)$]' NB, C(k; a, b)
```

```
prob=[:*/^2(0:.,[:].[:].[:i[:@]]+[:i[
```

```
ruin_probt=;prob*[coef{:@} NB.x=k,y=p,a+b
```