

## ポアソン試行の確率分布

統計数理研究所(名誉教授) 鈴木義一郎

一般に

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  という確率変数の分布について考える。ここで  $X_k$  は互いに独立で

$$\Pr\{X_k = 1\} = p_k, \Pr\{X_k = 0\} = q_k = 1 - p_k, k = 1, 2, \dots, n$$

である。特に全ての  $p_k$  が共通の  $p$  という値をとる場合が「ベルヌーイ試行」で、 $X$  は 2 項分布  $B(n, p)$  に従うことになる。また  $p_k$  が変動する場合は「ポアソン試行」と呼ばれている。 $\{p_k\}$  の平均と分散を

$$\bar{p} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k, w = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (p_k - \bar{p})^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k^2 - \bar{p}^2$$

と表すと

$$E\{X_k\} = p_k, V\{X_k\} = p_k q_k = p_k(1 - p_k)$$

であるから、 $X$  の期待値と分散は

$$E\{X\} = \sum_{k=1}^n E\{X_k\} = \sum_{k=1}^n p_k = n\bar{p}$$

$$V\{X\} = \sum_{k=1}^n V\{X_k\} = \sum_{k=1}^n p_k(1 - p_k) = n\bar{p}(1 - \bar{p}) - nw$$

のように与えられる。ここで  $n\bar{p}(1 - \bar{p})$  の部分は、2 項分布  $B(n, \bar{p})$  の分散であるから、 $\{p_k\}$  が変動する場合の分散は、一定の場合よりも  $nw$  という値だけ小さくなる。

次に、ポアソン試行の確率関数を 2 項分布を用いて

$$f(x) = b(x; n, \bar{p}) \{1 - [w/n2(n-1)]T(x; n, \bar{p})\}$$

のように近似することができる。ここで

$$b(x; n, p) = {}_n C_{n-x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$T(x; n, p) = \{(x - np)^2 - (1 - 2p)(x - np) - np(1 - p)\} / p^2(1 - p)^2$$

である。さらに

$$\sum_{k=0}^x f(k) = \sum_{k=0}^x b(x; n, h(\bar{p})) \quad , \quad h(p) = p - \frac{w\{x - (n-1)p\}}{2(n-1)p(1-p)}$$

といった関係が成立している。

|                                                                                                             |                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| <code>bden=:4 : '*/(t!x), (y,-.y)^t, : .t=.i.&gt;:x'</code><br>NB. all probability binomial distribution    |                           |
| <code>mean=:[:+/*] * i.@# NB.Expectation</code><br><code>var=:[:+/*] * [:* : i.@# - mean NB.Variance</code> | 右引数で与えた度数分布の期待値と分散を出力する関数 |

|                                                                      |                            |                            |
|----------------------------------------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <code>]p=:4 bden 0.4</code><br>0.1296 0.3456 0.3456 0.1536<br>0.0256 | <code>mean p</code><br>1.6 | <code>var p</code><br>0.96 |
|----------------------------------------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

|                                                                                                                       |                                                                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <code>test=:4 :0</code><br><code>q=.(x=+/"1 t)#t=.#:i.2^#y</code><br><code>q;p;+/*/"1 p=.(q#y),.(-.q)#-.y</code><br>) | <code>pden=:4 :0</code><br><code>q=.(x=+/"1 t)#t=.#:i.2^#y</code><br><code>+/*/"1 (q#y),.(-.q)#-.y</code><br>) |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>1 test 0.3 0.4 0.5 0 0 1   0.5 0.7 0.6   0.44 0 1 0   0.4 0.7 0.5   1 0 0   0.3 0.6 0.5   0 test 0.3 0.4 0.5 0 0 0   0.7 0.6 0.5   0.21</pre> | <pre>2 test 0.3 0.4 0.5 0 1 1   0.4 0.5 0.7   0.29 1 0 1   0.3 0.5 0.6   1 1 0   0.3 0.4 0.5   3 test 0.3 0.4 0.5 1 1 1   0.3 0.4 0.5   0.06 (i.4)pden"0 1 p=.0.3 0.4 0.5 0.21 0.44 0.29 0.06</pre> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                            |                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <code>mean 3 bden 0.5</code><br>1.5<br><code>var 3 bden 0.5</code><br>0.75 | <code>mean(i.4)pden"0 1 p=:0.4 0.5 0.6</code><br>1.5<br><code>var (i.4)pden"0 1 p=:0.4 0.5 0.6</code><br>0.73 |
|----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|