素数階乗 (Primorial, Prime Factorial)

幸運数 への 道

中野 嘉弘 (88 歳、札幌市)

FAX 011-588-8877、 yoshihiro@river.ocn.ne.jp

は し が き

例の如く、Yahoo 知恵袋・数学カテの新春版に「素数階乗」が登場して、幸運数 (Fortunate number)に繋がるとの話題を見た。 面白そうなので、J言語の出番をトライしてみた。 発展性は大きいようだ。

1. 素数階乗 とは

ユークリッド数(Euclid Number)を含め、似たような名前が多いので、困る。
階乗(Factorial) ! は、周知であり、普通の記号では 5! -> 1･2･3･4･5 = 120 である。 この積を、素数に限定すれば、2･ 3･ 5 = 30 となり、素数階乗と呼ぶ。 整数論の本では普通、5# と書く。

階乗の上限、今は 5 を一般に p と書けば p# となり、prime factorial, primorial, 階乗素数 と呼ぶ。

また、p# + 1 は ユークリッドが「素数の無限性」の証明に使ったので、ユークリッド数と呼ばれる。 または、p# - 1 と並んで、primorial prime 素数階乗素数とも呼ばれる。

2. J 言語に於ける 計算法

1) p = 5 の時:

普通の階乗] f5 =. ! 5 -> 120

その素因数分解 q: f5 -> 2, 3, 2, 2, 5

重複を除く ~. q: f5 -> 2, 3, 5

その積 */ ~. q: f5 -> 30

即ち、pf5 (prime factorial 5) =. 30 である。

2) p = 7 の時:

一挙にやれば]pf7=. */ ~.q: ! 7 -> 210

3) p 値が大きい時には、多倍長演算の指定 x が必要となる。

例: 10000 以下で最大の素数 8999 で。

所要時間 time=:6!:2 として、
time '*/ ~. q: f8999=.! 8999x' -> 2.4853 sec。

積の値 */ ~. q: f8999=.! 8999x
2264184035396725667838324222934519349446246396862070147278923224609556454296531437219709896727661512514633359665192600429332541392142750 31

積の桁数 # ":*/ ~. q: f8999=.! 8999x -> 3853 桁

素数因子の末尾 20 ケ分 _100 {. ": ~. q: f8999=.! 8999x
8819 8821 8831 8837 8839 8849 8861 8863 8867 8887 8893 8923 8929 8933 8941 8951 8963 8969 8971 8999

素数表と比較されたい。

3. ユークリッド数の因数分解

整数論の記号では p# + 1 が素数か合成数かを判定出来る。

トライ出来た最大値の例をしめす。 p = 113 である。

]f113 =. ! 113x ->
2231192748659813646596607021218715118256439908795221317102216134572402306358421469282104735211813906842556917922087746112477384592456157526473913819246331166720000000000000000000
000000000

q: 1 + */ ~. q: f118 ->

5122427・2025436786007・304670759506954024715705581 9

time 'q: 1 + */ ~. q: f113' -> 45.6877 (sec)。

Yahoo 知恵袋・数学カテ の回答例でも、 p = 137 で勘弁を乞うとあった。

(私 の PC は、富士通のノートパソコン FMVA555BRX Windows7 Home Premium

32 ビット 正規版、 メモリ 4GB、HDD 640GB である。)

4. p# - 1 の素因数分解

前例を用い、マイナス 1 をトライしたが、演算時間が長くなり、演算は不可能であった。

5. 幸運数 (fortunate number)

例 1) を挙げる。

$p = 5$ とすれば、その素数連乗 $P = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ である。 その時、

$P + 1$ より大きい最少の素数を q とすれば、素数表から $q = 37$ である。

その差 $q - P$ =「必ず素数になる」との予想を立てた人が居る。 今の例では

$= 37 - 30 = 7$ = 素数！ その人の名前 Reo Fortune を採り、この素数を 、

何と Fortunate 数 と呼ぶ。

例 2) を挙げよう。

$p = 2$ の時、素数連乗は $P = 1 \cdot 2 = 2$ で、 $P + 1 = 3$ より大きい最小の

素数は $q = 5$ 故、 $q - P = 5-2 = 3$ = 素数 = 幸運数 である。

例 3)

$p = 3$ の時、素数連乗は $P = 2 \cdot 3 = 6$ で、 $P + 1 = 7$ より大きい最小の

素数は $q = 11$ 故、 $q - P = 5$ = 素数 = 幸運数 である。

例 4)

$p =7$ とする。 $p\# = 7\# = P = 210$ から、$P + 1 = 211$ より大きい最小の素数は

$q = 223$ で、 $q - P = 223-210 = 13$ = 素数 = 幸運数 となる。

例 5)

$p = 11$, $P = 11\# = 2310$、$P + 1 = 2311$, $q =2333$, $q - P = 2333-2310 = 23$

= 素数 = 幸運数。

例 6) 以上をやって見て下さい。

$p= 13$, $P + 1 = 30031$, $q=30047$, $q - P = 17$ = 幸運数

例 7)
$p = 17$, $P+1 = 510511$, $q = 510529$, $q - P=19$ = 幸運数

例 8)
$p = 19$、$P+1 = 9699691$, $q = 9699713$, $q-P= 23$ = 幸運数

ここまでで、 第 8 番目までの幸運数が求められた。

次の幸運数は 37 なのですが、判りますか？

7. むすび

新年に当たり、皆様の幸運を祈ります。 J 言語で楽しみましょう。

文　献

1)　realhumen18 さん「素数階乗に 1 加えた数の素因数分解を出来るだけ多く教えて下さい。」 Yahoo Japan ! 　知恵袋>サイエンス＞数学

http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1137728396

2) Chris K. Caldwell 編著・SOJIN 編訳「素数大百科」共立出版、pp.385、2004.6.5 初版２刷 、\5800