いやらしい 固有値問題 の例解

中野嘉弘 (札幌市、あと一月で89歳)

は し が き

2011/FEB/26 の JAPLA 研究会に「品の悪い行列の固有値問題」と題する似たような エッセイを書いた(文献 1)。 YAHOO! Japan 知恵袋の「数学」のカテゴリに、最近 (Nov/23)、同類の質問(gold sakubun no sippitusya さん)を見た(文献 2)。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

次の 5x5 行列の固有値と固有ベクトルを求め、その手順も教えて下さい。

```
[-4  0  0  0  6]
[32  -2  -2  -8  -40]
[49  -5  -2  -13  -59]
[-25  2  1  6  29]
[-4  -1  1  1  4] 。
```

・・・・・・・・・・・・・・・・・

J 言語の名人・志村流の J 言語のプログラム・ルーチン JLPACK (文献 3)で直解可能かも知れないが、私は ADDON プログラムの DL の仕方には未だ、不慣れなので諦めた。

他の回答者も現れぬので、私(中野)の使い慣れた方法(文献 4) で回答を与えた。

しかし、これらの解法では不満が残った。

1. 手慣れた 回答例

与行列を gol55 と命名し、

●回答1: ルーチン N_evec gol55 より、

固有値は レヴェリエ・ファデーエフ法(固有方程式を解く簡単な手法)から

2, 2, _1, _1, 0 (重複解 2 組あり)、

固有ベクトルは、各固有値に対応して、(縦ベクトルとして読むが)

```
┌──┐
│ 2│
└──┘
┌──────────────────────────────┐
```

```
│ 0.000  0.000  0.000  0.000  0.000│
│ 0.000  0.000  0.000  0.000  0.000│
│ 0.000  0.000  0.000  0.000  0.000│
│ 0.000  0.000  0.000  0.000  0.000│
│ 0.000  0.000  0.000  0.000  0.000│
└─────────────────────────────────┘

┌──┐
│ 2│
└──┘

┌─────────────────────────────────┐
│ 0.000  0.000  0.000  0.000  0.000│
│ 0.000  0.000  0.000  0.000  0.000│
│ 0.000  0.000  0.000  0.000  0.000│
│ 0.000  0.000  0.000  0.000  0.000│
│ 0.000  0.000  0.000  0.000  0.000│
└─────────────────────────────────┘

┌────┐
│ _1 │
└────┘

┌─────────────────────────────────┐
│ 0.000  0.000  0.000  0.000  0.000│
│ 0.000  0.000  0.000  0.000  0.000│
│ 0.000  0.000  0.000  0.000  0.000│
│ 0.000  0.000  0.000  0.000  0.000│
│ 0.000  0.000  0.000  0.000  0.000│
└─────────────────────────────────┘

┌────┐
│ _1 │
└────┘

┌─────────────────────────────────┐
│ 0.000  0.000  0.000  0.000  0.000│
│ 0.000  0.000  0.000  0.000  0.000│
│ 0.000  0.000  0.000  0.000  0.000│
│ 0.000  0.000  0.000  0.000  0.000│
│ 0.000  0.000  0.000  0.000  0.000│
└─────────────────────────────────┘

┌──┐
│ 0│
└──┘

┌─────────────────────────────────┐
│ 12.000 12.000_12.000_12.000 12.000│
│_76.000_76.000 76.000 76.000_76.000│
│**************116.000116.000*******│
│ 56.000 56.000_56.000_56.000 56.000│
│  8.000  8.000 _8.000 _8.000  8.000│
└─────────────────────────────────┘
```

即ち、 重複固有値に対応しては、すべて |0 0 0 0 0|、これが通常のことである。

単一固有値 lamda = 0 に対応しては、直上のノン・ゼロの値である。

これに対する、質問者は「もっとやさしい回答をお願します。」と！ 御不満らしい。

2.　　第 2 の 解

●●　回答 2 ：　使い慣れた第 2 のルーチンでやって見る。

中野の関数　(2 2 _1 _1 0) eigvec　gol55　から、

下表の如く、各固有値に対応して、しめて 5 組 求められる（固有ベクトルは縦ベクトルとして読む）。

```
┌───────────────────────────┬──────
│ _6  0  0   0   6│ _6  0  0   0   6│
│ 32 _4 _2  _8 _40│ 32 _4 _2  _8 _40│
│ 49 _5 _4 _13 _59│ 49 _5 _4 _13 _59│
│_25  2  1   4  29│_25  2  1   4  29│
│ _4 _1  1   1   2│ _4 _1  1   1   2│
└───────────────────────────┴──────
```

```
┬───────────────────────────┬──────
│ _3  0  0   0   6│ _3  0  0   0   6│
│ 32 _1 _2  _8 _40│ 32 _1 _2  _8 _40│
│ 49 _5 _1 _13 _59│ 49 _5 _1 _13 _59│
│_25  2  1   7  29│_25  2  1   7  29│
│ _4 _1  1   1   5│ _4 _1  1   1   5│
└───────────────────────────┴──────
```

```
 ──────────────────┬
│ _4  0  0   0   6│
│ 32 _2 _2  _8 _40│
│ 49 _5 _2 _13 _59│
│_25  2  1   6  29│
│ _4 _1  1   1   4│
└─────────────────┘
```

この場合、解は全て、ノン・ゼロではあるが、同一固有値に対しては、夫々、同じベクトル値である。

質問者からは、「順序よく、易しい回答をお願いします」 との反応があった。

勿論、私以外の回答はなかった。（閲覧者は多数あったが！）

さて、どうしましょう？

3.　　まともな（?） 第 3 の解

nakanochurch さん の　解　(2011/11/30/ 10:41)

☆ 与行列 gol55=. A=.
_4 0 0 0 6
32 _2 _2 _8 _40
49 _5 _2 _13 _59
_25 2 1 6 29
_4 _1 1 1 4 。

（負数には記号アンダーバー _ を付して示す事あり。）

△ 固有値
LF(ルヴリエ・ファデーエフ)法,即ち、固有多項式 |A - λI| = 0
を直接解く方法などで、LF A から、
λ = 0, _1, _1, 2, 2。

★ 固有ベクトル
行列やベクトルの内積(inner product) を ip として、
連立方程式 (A - λI) ip (x,y,z,u,w) = 0 を解く。

1) λ= 0 の時、

-4x + 6w = 0
32x - 2y - 2z -8u - 40w = 0
49x - 5y -2z -13u -59w = 0
-25x + 2y + z + 6u +29w = 0
-4x - y + z + u + 4w = 0 。

解は、
w = 2u/14, x= 3u/14, y= -19u/14, z = -29u/14 。

例えば、u = 14 として、(x,y,z,u,w) =
(3, -19, -29, 14, 2)。

2) λ= -1 の時、

-3x + 6w = 0
32x - y -2z -8u -40w = 0
49x - 5y -z -13u -59w = 0
-25x + 2y + z + 7u + 29w = 0
-4x -y + z + u + 5w = 0 。

解は、
x = 2w, y = 6w -2u, z= 9w - 3u 。

即ち、例えば、u = 0, w = 1 として、(x,y,z,u,w) =
(2, 6, 9, 0, 1)。

他に独立解は、例えば、u = 1, w = 0 として、(x,y,z,u,w) =
(0, -2, -3, 1, 0)。

3) λ= 2 の時、

-6x + 6w = 0
32x - 4y -2z -8u -40w = 0
49x -5y - 4z -13u -59w = 0
-25x + 2y + z + 4u + 29w = 0
-4x - y + z + u + 2w = 0 。

解は、
x = w, y = -u - 2w , z= - 2u 。

即ち、例えば、u = 0, w = 1 として、(x,y,z,u,w) =
(1, -2, 0, 0, 1)。

他に独立解は、例えば、u = 1, w = 0 として、(x,y,z,u,w) =
(0, -1, -2, 1, 0)。

● かくして、固有ベクトルが得られた。まとめれば

v1 = (3, -19, -29, 14, 2)、

v2 = (2, 6, 9, 0, 1)、

v3 = (0, -2, -3, 1, 0)、

v4 = (1, -2, 0, 0, 1)、

v5 = (0, -2, -3, 1, 0) 。

対応する固有値は

λ = 0, _1, _1, 2, 2。

これならどうだ！

ただし、質問者さんからは、何の反応も、未だ無い。

4. 連立方程式の解法

この第 3 節の、肝心の「連立方程式の解法」にはちょっと苦労があった。

実は、世界的に有名な Mathematica の本舗である 計算エンジン、WolframAlpha

を利用したのだ。これは、J 言語の強力なライバルであるな！

利用法を、示す。

0) λ = 0 の場合:

solve -4x+6w=0,32x-2y-2z-8u-40w=0,49x-5y-2z-13u-59w=0,-25x+2y+z+6u+29w=0,
-4x-y+z+u+4w=0

と入力して、等号 = の設定シンボルを押すだけでよい。

Input interpretation: で入力分に反応し、計算可能な場合には、Result: と

して解が出る。 その後、題意に従って、ちょっと計算を補足すれば良い。

1) λ = _1 の場合:

solve -3x+6w=0,32x-y-2z-8u-40w=0,49x-5y-z-13u-59w=0,-25x+2y+z+7u+29w=0,
-4x-y+z+u+5w=0

と入力して、等号 = の設定シンボルを押す。

Result は複雑であり、複数解の存在を示す。

2) λ = 2 の場合:

solve -6x+6w=0,32x-4y-2z-8u-40w=0,49x-5y-4z-13u-59w=0,-25x+2y+z+4u+29w=0,
-4x-y+z+u+2w=0

と入力して、等号 = の設定シンボルを押す。

Result は、この場合も複雑であり、複数解の存在を示した。

入力が不合理であれば、指摘する反応がある。 時には、go on computing

(計算中) の反応があって、いわゆるフリーズ状態になる場合もある。

その場合には、等号 = の設定シンボルを押し直すと、巧く行く場合がある。

本件の計算の場合には、再三、その目にあった。 これが難問な筈だ！

5. 一挙に、この固有値問題を解くには

本件の難問が、間接的あがら解けたからには、一挙に解けないか？ 試みた。

Input としては、

eigenvectors {{-4,0,0,0,6},{32,-2,-2,-8,-40},{49,-5,-2,-13,-59},{-
25,2,1,6,29},
{-4,-1,1,1,4}}

と入力して、等号 = の設定シンボルを押す。

Result:

v1 = (1,-2, 0, 0, 1)
v2 = (0,-1,-2, 1, 0)
v3 = (2, 6, 9, 0, 1)
v4 = (0,-2,-3, 1, 0)
v5 = (3, -19, -29, 14, 2)

Corresponding eigenvalues:

λ1 = 2
λ2 = 2
λ3 = -1

$\lambda 4 = -1$
$\lambda 5 = 0$

以上 Computed by Wolfram Mathematics であった。

6. む す び

兎に角、苦心惨憺(Mathematica でもやっと)解けた固有値問題である。

いやらしい極みであるが、色々、参考になった。

資　料

1 -1) 中野嘉弘:「品の悪い行列の固有値問題」JAPLA 2011/Feb/26、pp.6
-2) 中野嘉弘:「複素固有値でのジョルダン分解」JAPLA 2011/Mar/26、pp.6
-3) 中野嘉弘:「固有ベクトル計算法(志村論文の理解)」JAPLA 2010/Sep/25、pp.11
-4) 中野の回答:「行列の固有値が重解のときの変換行列」sappyqq62 さん 2011/7/3 16:38
http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail.php?qid=1065798560

2 -1) gold_sakubun_no_sippitusya さん、2011/11/23
http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1476048359
-2)gold_sakubun_no_sippitusya さん、2011/11/29
http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1176435176

3 -1) 志村正人:「マトリックスの数学(1)行列の固有値」pp.47、APL 蓼科合宿、2010/Aug5-7
-2) 志村正人:「マトリックスの数学(2)行列の変換」pp.40、2010/Sept/25
他、多数あり

4) nakano 回答:文献 2-2 に相当。