

# 不採算事業と内部利子率を用いたシミュレーション

SHIMURA Masato

2010年9月27日

## 目次

1	内部利子率	1
2	幾つかのシミュレーション…CFと会計	6
3	投資期間の延長と内部利子率の関係	10

\*1

### 概要

内部利子率 *irr* のスクリプトは僅か数行で記述できるが非常に強力である。不採算事業の構造を *irr* を用いてシミュレーションすることにより解明する。

*irr*(Inner rate of return)function is able to written only few lines,and it is very powerful and useful for simulate unprofitable business model.

## 1 内部利子率

プロジェクトや投資を検討するのに次のような方法がある。

1. NPV(Net Present Value) 正味現在価値法
2. IRR ( Inner Rate of Return) 内部利子率法

NVP は金額ベース、IRR は率で推し量るものであるが NVP は内部で IRR を用いて計算しており結果が異なることはない。

内部利子率は債券投資とプロジェクト投資の双方で利用されている。表題のシミュレーションでは主としてプロジェクト投資を検討する。

1. 債券投資

---

\*1 SHIMURA Masato Japan APL Association

## 2. プロジェクト投資

- (a) 期間終了時に償却
- (b) 耐久財

かつて GE(General Erectrics) がマッケンジーと共同開発した 9 セルマトリクスやボストンコンサルタントの 4 セルマトリクスがポートフォリオ経営として知られる。

僅か数行のスク립トで表すことができる  $irr$  は時間に対して中立であってプロジェクトの開始時、中間時点、終了時の何れの時点にあっても評価に用いることが出来る。従って問題の先送りなどの兆候も数字に表れ、ポートフォリオの資料として活用できる

投資やプロジェクトの採算問題に関しては先に「内部利子率と幾何平均収益率 (JAPLA 2009/12)」で紹介した。今回は表題をフォーカスする。

## 1.1 内部利子率の計算 (1)

$$P = \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C_{t-1}}{(1+r)^{t-1}} + \frac{C_t + F}{(1+r)^t}$$

Example1 100 円投資して、1 年目、2 年目は 5 円の配当を受け取り、3 年目に 5 円の配当を得て 120 円で売却した。

(手元資金で運用、借金はしていない。)

次の式を満たす  $r$  を求める。

$$100 = \frac{5}{1+r} + \frac{5}{(1+r)^2} + \frac{125}{(1+r)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{-100(1+r)^3 + 5(1+r)^2 + 5(1+r) + 125}{(1+r)^3}$$

- 展開して分子を取り出すと多項式になる

$$35 - 285r - 295r^2 - 100r^3 = 0$$

$$\begin{array}{r} -100(r^3 + 3r^2 + 3r + 1) \\ 5(r^2 + 2r + 1) \\ 5(r + 1) \\ 125 \end{array}$$

- 高次多項式が現れたら数値解法で解く。

1. J には多項式関数のプリミティブ (p.) があるので Newton 法を持ち出すまでもない。

- (a) 多項式の係数を計算する

```
mk_poly_sum _100 5 5 125
35 _285 _295 _100
```

(b) 多項式の係数を計算する関数

```
mk_poly_sum=:3 : 0
NB. make polynomial coefficient
|. +/ y * |."1 |. pascal <: # y
)
```

```
pascal=:3 : '|: !/~ i. >: y' NB. Pascal triangles
```

(c) Jの多項式関数(p.)で解く。多項式の次数分の解が現れるが多くは複素数であるので意義のある実数解を採用する。

```
;}. p. 35 _285 _295 _100
_1.52993j0.919487 _1.52993j_0.919487 0.109851
内部利子率は 10.98%(実数解)
```

2. irr の計算は J のライブラリを利用する。J の addon のファイナンスに入っている。

```
require jpath '~addons/finance/interest/interest.ijs'
```

– irr で計算する。

```
irr _100 5 5 125
0.109851
```

– xirr eXtended irr

```
xirr 0 1 2 3, : _100 5 5 125
0.109851
```

3. irr, xirr は EXCEL にも入っている。マイナスの利子率は計算できない。

## 1.2 幾つかの計算例

### 1. 利益の出る場合

- 投資額 100 CF 5 投資回収 120 余剰あり

```
irr _100 5 5 125
0.109851
```

- 投資額 100 CF 5 投資回収 100 全額

```
irr _100 5 5 105
0.05
```

### 2. 不採算事業の場合

- 投資額 100 CF -5 投資回収 100-5 損失分を除き初期投資全額

```
irr _100 _5 _5 95
_0.05
```

- 投資額 100 CF -5 投資回収 100-15 損失分は控除

```
irr _100 _5 _5 85
_0.0863861
```

- 多項式から計算してみると

```
mk_poly_sum _100 _5 _5 95
_15 _315 _305 _100
```

$$f = -15 - 315x - 303x^2 - 100x^3$$

```
p. mk_poly_sum _100 _5 _5 95
+-----+
|_100|_1.5j0.866025 _1.5j_0.866025 _0.05|
+-----+
NB. -5%
```

### 1.3 J の *irr* 関数

J の addon の finance パッケージに *interest.ijs* が入っておりこの中に *irr* 関数がある。

NB. internal rate of return by newton-raphson iteration.

NB. form: t irr cf

NB. t = optional initial trial value (decimal rate)

NB. cf = cash flow starting at time 0

NB. tolerance 1e\_5, max iterations 15

NB. result is decimal interest rate, or error message

```
irr=: 3 : 0
```

```
0 irr y
```

```
:
```

```
t=. %>:x
```

```
cf=. ,y
```

```
tol=. 1e_5
```

```
max=. 15
```

```
if. 2>#cf do. 'cash flow must have at least two elements' return. end.
```

```
if. -. *./_1 1 e.*cf do. 'no sign change in cash flow' return. end.
```

```
cf=. (|.cf),:|.1|.cf*i.#cf
```

```
while. tol<|t-r=. t-%/t#.cf do. t=. r
```

```
if. 0=max=. <:max do. 'iterations exceeded' return. end.
```

```
end.
```

```
<:%r
```

)

*irr* 関数は竹内 (JAPLA 2010/3) に詳細に解説されている。

(要約)

$$P(x)' = \frac{dP(x)}{dx} = M\{nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \dots + 2x + 1\}$$

$$= M(n(n-1), (n-2), \dots, 3, 2, 1) \odot (x^{n-1}, x^{n-2}, \dots, x^2, x, 1)$$

⊙ はアマダール積

このスクリプトの中核はサイエンスの芸術とも言える次の 2 行で `cf*i.#cf` でアマダール積を計算し、微分の多項式の係数を求めニュートン法で解を求めている

```
cf=. (|.cf),:|.1|.cf*i.#cf
while. tol<|t-r=. t-%/t#.cf do. t=. r
```

J Grammar

%	÷	割り算
>:	+1	1 増
<:	-1	1 減
#	<i>copy</i>	指定個数の <i>copy</i>
-.	<i>less</i>	1 から引く
*.	<i>And</i>	論理演算
e.	<i>membersof</i>	含まれるか照査
		絶対値
=	<i>equal</i>	等しいか照査

#### 1.4 キャッシュフローと内部利子率

- 資金が中立の場合。即ち内部補助や別立て原資がある場合。

1. 10 年 CF 各年 5% のプラス

```
irr _100 5 5 5 5 5 5 5 5 5 105
0.05
```

2. 10 年 CF 各年 5% のマイナス

このケースをベースとする。資金に中立であり、損失分と *irr* の率が一致する。

```
irr _100 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 95
_0.05
```

## 2 幾つかのシミュレーション…CFと会計

### 2.1 CFと会計

1. CFと企業会計は多少異なる。
  - *irr*の計算ではCFで減価償却の費用控除は行わない
  - 事業資金を借り入れた場合、金利は費用に加算
  - 租税のうち費用控除できるもの(法人住民税など)は費用に加算
2. 再投資と会計
 

プロジェクト投資では施設の維持管理と改築が生じる

  - 維持管理は費用
  - 改修は再投資
3. プロジェクト投資終了時の資金回収。内部利子率は内部計算であり、企業会計と同一にする必要はない
  - 製造設備などへの投資  
残存価値は少ない
  - 永続的耐久消費財(多くの公共財)  
残存価値または再構築価格(大きい)

### 2.2 *irr*の計算とその限界

*irr*は本来利益の出ない投資の計算用には作られていない。

Jの*irr*は計算安定のため次の制約を設けている。

- 反復回数(iteration) 15回
- 収束(tolalance) 1e\_5

先にこのケースをベースと定めた。10年では高々10次の多項式である。

このケースでは(1)投下資本は全額保全されている。(2)損失は何らかの形で補填され資金手当は必要でない

```
irr _100 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 95
_0.05
```

script上の制約はScriptを書き換えると多少は改善される。*irr*で解が得られない(相当悪化する)場合には別途多項式の係数を求め数値解法を用いる。高次多項式の解法は幾つかあるが、30次を超えると多くのスクリプトを試さないと解が不安定である。

## 2.3 負の連鎖に陥りやすい3ケース

### 2.3.1 (1) 投資した設備が毀損する場合

減価償却はCFの枠外である。

#### 1. irrで計算できる範囲。

- このケースで irr は回収額は 25 以下では計算エラー

```
irr _100 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 25
_0.225372
```

```
irr _100 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 24
iterations exceeded
```

- max を修正すると少し延命

```
irr _100 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 21
_0.250046
```

- 20 では再度エラー。今度は論理エラー

```
irr _100 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 20
|NaN error: irr
| tol<|t-r=.t-%/t #.cf
```

- #### 2. 多項式の係数を求め直接計算する。内部利率が-20%で事業を継続することも無かろうが、多項式の係数を求めて計算を続ける。多くの複素数に混じって実数が一個あらわれる事が多い

- 残存価値 25 事業損失-5

```
mk_poly_sum _100 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 20
_120 _1080 _4020 _9030 _13230 _13020 _8580 _3645 _905 _100
```

$$f = -120 - 1080x - 4020x^2 - 9030x^3 - 13230x^4 - 13020x^5 - 8580x^6 - 3645x^7 - 905x^8 - 100x^9$$

```
3 3 $ ; >. p. mk_poly_sum _100 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 20
_1.7973j0.291719 _1.7973j_0.291719 _1.4204j0.737558
_1.4204j_0.737558 _0.843007j0.83419 _0.843007j_0.83419
_0.335752j0.52728 _0.335752j_0.52728 _0.257098
```

- case 経過で 15(残存価値 15)

```
3 3 $ ; >. p. mk_poly_sum _100 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 10
_1.7453j0.274221 _1.7453j_0.274221 _1.38916j0.692255
_1.38916j_0.692255 _0.843475j0.778543 _0.843475j_0.778543
_0.363276j0.47435 _0.363276j_0.47435 _0.367591
```

- 残存 10% + (事業損失 -5)

```

3 3 $ ; >}. p. mk_poly_sum _100 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 5
  _1.7015j0.260371  _1.7015j_0.260371  _1.36074j0.655952
  _1.36074j_0.655952  _0.837946j0.732154  _0.837946j_0.732154
  _0.370934j0.424264  _0.370934j_0.424264  _0.507766

```

- 最終年次を0とする。内部利子率が-100%となる

```

3 3 $ ; >}. p. mk_poly_sum _100 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 0
  _1.60494j0.237263  _1.60494j_0.237263  _1.28678j0.595507
  _1.28678j_0.595507  _0.795061j0.657007  _0.795061j_0.657007
  _1 _0.338225j0.366481  _0.338225j_0.366481

```

- case 0 (add 事業損失 -5)

```

3 3 $ ; >}. p. mk_poly_sum _100 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 _5 5
  _1.67904  _1.53649j0.422726  _1.53649j_0.422726
  _1.16228j0.67697  _1.16228j_0.67697  _0.694842j0.656053
  _0.694842j_0.656053  _0.291863j0.347337  _0.291863j_0.347337

```

### 2.3.2 (2) 損失に資金手当が必要な場合

- ベース (同一)

```

irr _100 ,(10#_5),95
_0.05

```

- 元金均等の場合の各年5借り入れの金利内訳 (スクリプトを作成した)

```

{: 0.03 layer_ganri (10#5);|.>: i.10
+-----+
|0  0.0015|
|1  0.00285|
|2 0.00403333|
|3 0.00502917|
|4 0.00581071|
|5 0.00634226|
|6 0.00657381|
|7 0.00643036|
|8 0.0057869|
|9 0.00439345|
+-----+

```

- 金利合計 概ね1年分

+/ 金利  
0.04875

- 各年の損失と発生金利の合計を a とする。

a = .5 + -{"1 ; {" 0.03 layer\_ganri (10#5);|.>: i.10

- 金利のみでは負の連鎖は生じない

irr \_100, (a), 95  
\_0.0500444

- 損失の元金返済が投資設備の価値を毀損し、負の連鎖となる。

-13.5%

irr \_100, (a), 45  
\_0.134568

### 2.3.3 (3) 改修費用が過大な場合

- ベース 各年 5 の損失

irr \_100 \_5 \_5 \_5 \_5 \_5 \_5 \_5 \_5 \_5 95  
\_0.05

- 中間年に 30 の追加投資（改修、拡充など）。投資額が拡充し内部利子率は低くなる

irr \_100 \_5 \_5 \_5 \_5 \_35 \_5 \_5 \_5 \_5 130  
\_0.0378623

- 改修で資産価値が増えない場合。収入が増えなければ負の連鎖が始まる (-7.8%)

irr \_100 \_5 \_5 \_5 \_5 \_35 \_5 \_5 \_5 \_5 95  
\_0.0780361

- 残存価値から損失を控除（改修では価値増加）

irr \_100 \_5 \_5 \_5 \_5 \_35 \_5 \_5 \_5 \_5 80  
\_0.100241

- 改修で価値増加無し、損失控除

irr \_100 \_5 \_5 \_5 \_5 \_35 \_5 \_5 \_5 \_5 45  
\_0.176409

### 3 投資期間の延長と内部利子率の関係

ここでも *irr* には減価償却費は経費として取り込まないこととする。  
資産保全の有無と *irr* の関係をシミュレーションする。

- ベース (毎年 5% の利益 最終年に資産は保全 (投資額の返還を受ける))

```
irr _100 5 5 5 5 5 5 5 5 5 105
0.05
```

- 5% 最終年に資産を償却してしまう (-11%)

```
irr _100 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5
_0.10956
```

- 資産を償却するのに必要な各年の収益率を求める

1. 10 年なら各年の収益率 10% で償却可能

```
irr _100 , 10#10
0
```

2. 20 年なら 5%

```
irr _100 , 20#5
0
```

3. 30 年なら 3.33%

```
irr _100 , 30#3.33
_6.45363e_5 NB. 0
```

4. 50 年なら 2%

```
irr _100 , 50#2
0
```

5. 100 年なら 1%

```
irr _100 , 100#1
0
```

## References

- 竹内寿一郎「財務計算あれこれ (第 3 回) 内部利率の計算式」JAPLA 2010/3  
志村正人「内部利子率と幾何平均収益率 (JAPLA 2009/12)」

## Miscellance

J 言語の入手

<http://www.jsoftware.com>

JAPLA の HP

<http://japla.sakura.ne.jp>