

景気動向指数のウェーブレット分解 Numeric Recipe for Econometrics(4)

SHIMURA Masato
jcd02773@nifty.com

2010年8月19日

目次

1	ウェーブレット変換	1
2	ドビッシウーブレット変換	9
3	景気動向指数への応用	12

概要

ウェーブレットは非定常や分散の変化する時系列に適用できる。配列を用いた多重解像度分解の計算手法を整理し、幾つかの経済時系列へ応用する。

To design a Haar and Daubechies wavelet transformation , and use it to analyze the Japanese Business Trend

景気動向指数の簡約

ESRI(社会経済研究所)の発表する30を越える月次または四半期の景気動向指数の長期系列は誰でもDLでき貴重である。

ESRI(社会経済研究所)が景気動向指数として公表しているのは、先行系列(L1-L12)、一致系列(C1-C11)、遅行系列(L1-L7)の35系列で、1975年1月からの月次統計である。

2008年4月分からはCIを景気判断の軸に据え、さらに全てのデータの月次化が行われた。ESRIは景気のピーク・ボトムも判定も行っているが、ピーク、ボトムの公表は概ね1年経過後である。

1 ウェーブレット変換

波型の解析では大小の \sin, \cos の組み合わせで波形をシュミレートするフーリエ変換が知られている。フーリエ変換は定常波には強いが、非定常や分散の変化する波の場合は複雑な計算を必要と

した。

ウェーブレット分解は 1980 年にフランスの石油探査の技師 *Jean Morlet* が考案した波形の分解手法である

基本的には、小さい波（ウェーブレット）を拡大縮小、平行移動して足し合わせることで、与えられた入力の波形を表現しようとする手法である。

1.1 多重解像度分解・カスケード分解

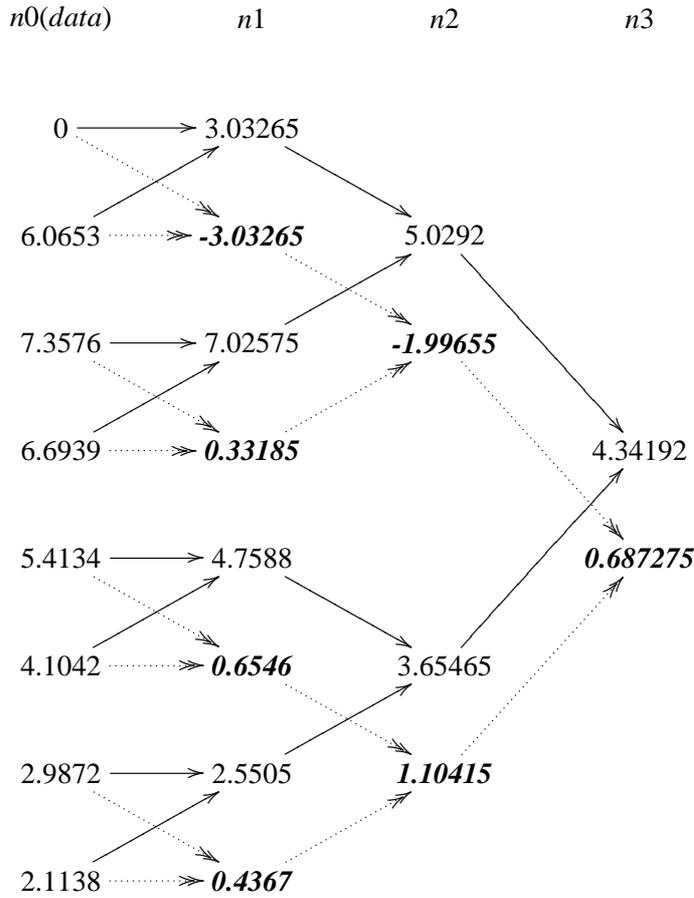
先にスケーリング関数 φ を構成して、この関数をもとにウェーブレット関数 ψ を構成する手法は多重解像度解析として知られる

1.1.1 カスケード分解のアルゴリズム

- 次のテーブルの $n_0(\text{data})$ を 2 個ずつ（重複しないで）次のように計算する

足して 2 で割る	→	スケーリング係数	上段	<i>low pass filter</i>
引いて 2 で割る	… >	ウェーブレット係数	下段 (bold)	<i>high pass filter</i>

- 更に n_1 のスケーリング係数 (細字) のみを取り出して 2 個ずつを同様に組み合わせて計算する。 $n_2, n_3..$ も同様に計算する。
- 更に n_1 のウェーブレット係数 (太字) のみを取り出して 2 個ずつを組み合わせて計算する。
- このような単純な計算で波がカスケードに分解できる。下降サンプリングと言われる。
- スケーリング・フィルタとウェーブレット・フィルタは合わせてフィルタバンクを構成する



(例題は金谷による)

スケーリング関数の部分のみを取り出してグラフにすると波の分解されている様子が分かる。

これは多重解像度解析と呼ばれる離散データを順次低周波から高周波への成分で表したデータの線形結合に分解する手法である。

```

cascade_hwt K0
+-----+
|0 6.0653 7.3576 6.6939 5.4134 4.1042 2.9872 2.1138 |
+-----+
|3.03265 _3.03265 7.02575 0.33185 4.7588 0.6546 2.5505 0.4367|
+-----+
|5.0292 _1.99655 3.65465 1.10415 |
+-----+
|4.34192 0.687275 |
+-----+

```

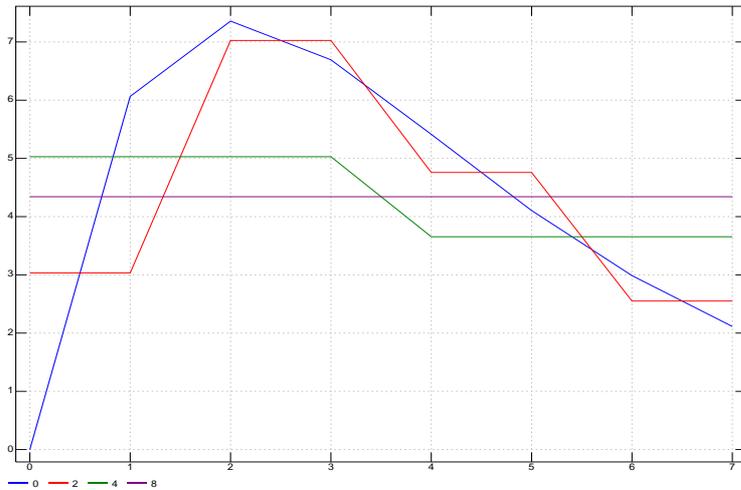


図1 ハールの多重解像度分解

ウェーブレット小史 ウェーブレットはフランスの石油探査会社の技師 *Jean Morlet* が 1980 年代初頭に考案したとされる。モレはマルセイユの理論物理学者 *Grossmann* のところに持ち込み、マルセイユで理論的基礎が構築された。^{*1}

1985 年にフランス人の数学者 *Yves Meyer* (ドフィンヌ大) が同僚の物理学者にウェーブレットを紹介されて興味を持ち、その日の列車に飛び乗ってマルセイユへ赴いて共同研究を行い数学面の理論化を行った。

1986 年にペンシルバニア大学でメイエの講演を聴いたコンピュータ画像を研究していたフランス人の大学院生 *Stephane Mallat* が、過去にも信号や画像の処理など工学分野で類似の手法が多く研究されていることを指摘し、メイエとの共同研究で多重解像度解析の理論が誕生した。^{*2} 波の周辺には音楽家と同じ名前がよく現れる。

1.2 高速ハール・ウェーブレット変換

1.2.1 波とフィルター

スケーリングフィルタは周期の長い波を通す (*Low pass filter*)

スケーリングフィルターに要求される条件

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^L g_k &= \sqrt{2} \\ \sum_{k=1}^L g_k^2 &= 1 \\ \sum_{k=1}^L g_k g_{k+2} &= 0 \end{aligned}$$

^{*1} この素敵な嘯きを持つ言葉に従来からの同様の論考やアイデアも吸い寄せられて、短時間に理論が形成された。信号や画像処理系の利用が先行したので、用語や記述法も電気系か数学系の難解なものが多い

^{*2} このような単純なアルゴリズムが最近まで手付かずで残っていたことが不思議である。カスケード分解は画像系の人達はメモリと計算速度に眼が行き、美しい構造を見逃していたようだ

L =フィルターの長さ

ウェーブレットフィルターは周期の短い波を通す (*high pass filter*)

*3

ウェーブレットフィルターに要求される条件

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^L h_k &= 0 && \text{フィルター要素を全部加えると } 0 \\ \sum_{k=1}^L h_k^2 &= 1 && \text{フィルターエネルギーを } 1 \text{ と標準化} \\ \sum_{k=1}^L h_k h_{k+2} &= 0 && \text{偶数倍シフトさせたフィルターと元のフィルターが直交}\end{aligned}$$

ドビッシー・フィルタには更に次の 1 項が追加される。時系列の線形トレンド部分はスケーリング・フィルタは通過するが、ウェーブレット・フィルタは通過しない。

$$\sum_{k=1}^L (K-1)^i h_k = 0$$

スケーリングフィルターとウェーブレットフィルターの関係

互いに直交する

$$\sum_{k=1}^L g_k h_{k+2} = 0$$

スケーリングフィルターはデータの趨勢を捕らえ、ウェーブレットフィルターはデータの趨勢からの乖離を補足し、2 つ合わさって原系列に含まれる情報を保存する。

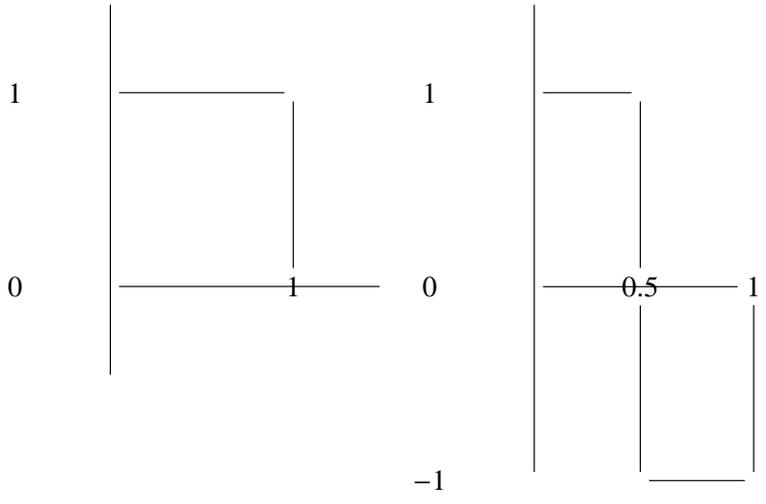
1.2.2 Haar のウェーブレット

wavelet のはさざ波、小波である。この *wavelet* を基底として用いる (原始波形と考える)

先の足して 2 で割る、引いて 2 で割るがハール・ウェーブレットのコアである。Alfred Haar によって 1909 年に提案された。

次のマトリクスに辿り着く迄の道筋を簡単にフォローする。

*3 high pass filter=wavelet filter 高周波は通過するが低周波は通過させないフィルタ



ϕ Scaling	$\phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	ψ Wavelet	$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq t < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
-------------------	--	-------------------	---

$$0\phi_{(0,0.5)} + 6.0653\phi_{(0.5,1)} = \frac{0 + 6.0653}{2}\phi_{(0,1)} + \frac{0 - 6.0653}{2}\psi_{(0,1)} = 3.03265\phi_{(0,1)} - 3.03265\psi_{(0,1)}$$

```

hmat=. 1r2 1r2 ,: 1r2 _1r2
1r2 1r2
1r2 _1r2

a=. 0 6.0653

hmat +/ . * a
3.03265 _3.03265

hmat2
1r2 1r2 0 0
1r2 _1r2 0 0
0 0 1r2 1r2
0 0 1r2 _1r2

a1=.0 6.0653 7.3576 6.6939

hmat2 +/ . * a1
3.03265 _3.03265 7.02575 0.33185

```

1.2.3 マトリクスへの展開

高速と唱っているが、単なる線形計算である。

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

の形をデータ (2^n) に合わせる。の個数に展開すれば最初のマトリクスとなる。カスケードの計算過程で n が $\frac{1}{2}$ ずつ縮小していくのでマトリクスもその都度縮小形に作り変える。規格化したデータの場合は次を用いる

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

奇数行 (a) はスケール関数を、偶数行 (c) はウェーブレット関数を計算する。

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ c_0 \\ a_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \end{pmatrix}$$

```

mat_hwt_sub K0
0.5 0.5 0 0 0 0 0 0
0.5 -0.5 0 0 0 0 0 0
0 0 0.5 0.5 0 0 0 0
0 0 0.5 -0.5 0 0 0 0
0 0 0 0 0.5 0.5 0 0
0 0 0 0 0.5 -0.5 0 0
0 0 0 0 0 0 0.5 0.5
0 0 0 0 0 0 0.5 -0.5

```

1.2.4 ハール・ウェーブレットの逆変換

ウェーブレットは逆変換が可能である。スケーリングとウェーブレットの値をサンドイッチにして小さなマトリクスから逆に組み上げていく。

$$\begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ c_1 \\ a_2 \\ c_3 \\ a_4 \\ c_5 \\ a_6 \\ c_7 \end{pmatrix}$$

0	$ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ c_0 \end{pmatrix} $	<pre> a1=.4.34192 0.687275 (1 1, :1 -1) +/ . * a1 1 1 1 -1 (1 1, :1 -1) +/ . * a1 5.0292 3.65465 </pre>
---	---	---

```

3 reverse_hwt cascade_hwt K0
5.0292 3.65465
2 reverse_hwt cascade_hwt K0
3.03265 7.02575 4.7588 2.5505
1 reverse_hwt cascade_hwt K0
0 6.0653 7.3576 6.6939 5.4134 4.1042 2.9872 2.1138

```

1.3 ドビッシー・ウエーブレット

*4

Ingrid Daubechies ベルギー生まれの女性研究者。ベルギーの *Free University* で *ph.D* を取り 7 年ほど教えた後、ベル研究所などを経て現在プリンストン大学教授。

1.3.1 ドビッシー基底

ドビッシーは 1987 年にカスケードアルゴリズムでのコンパクト台を持つウエーブレット基底を考案した。

1.3.2 D_4

$N_2(D_4)$ の場合。なお、 $(N_1(D_2))$ は *Haar* 基底と同じである。

*5

2 ドビッシウエーブレット変換

D_4 の係数を次式によりマトリクスにする。 $N = 2^k$ である。最後の 2 行がマトリクスをはみ出す。データを周期的と見なして回り込みを許すかダミーデータを入れるなどこの部分の計算を工夫する必要がある。

*4 響きの良いフランス語読みとする。

*5 規格化を行わない場合は $\frac{1 + \sqrt{3}}{4}$ の様に $\sqrt{2}$ を落とす。双方とも用いられているようだ。

Scaling 規格化の場合。

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

$$h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

$$h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

$$h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

Wavelet $g_0 = h_3$

$$g_1 = -h_2$$

$$g_2 = h_1$$

$$g_3 = -h_0$$

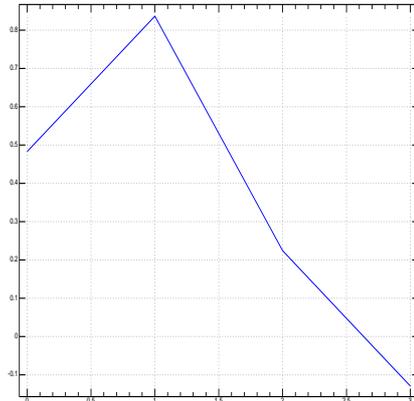


図2 mother wavlet ϕ

データを規格化した場合は規格化基底を、非規格化の場合は非規格化基底を用いる

dp_40 '' NB. 規格化の D4 基底

0.482963 0.836516 0.224144 _0.12941

dp_41 '' NB. 非規格化の D4 基底

0.683013 1.18301 0.316987 _0.183013

$$\begin{pmatrix} a_0^{n-1} \\ a_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} \\ a_3^{n-1} \\ a_4^{n-1} \\ a_5^{n-1} \\ a_6^{n-1} \\ a_7^{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^n \\ a_1^n \\ a_2^n \\ a_3^n \\ a_4^n \\ a_5^n \\ a_6^n \\ a_7^n \end{bmatrix}$$

*6

6j2 ": mat_dwt4_sub K0 NB. 配列部分 回り込み許容

```
0.48 0.84 0.22 _0.13 0.00 0.00 0.00 0.00
_0.13 _0.22 0.84 _0.48 0.00 0.00 0.00 0.00
0.00 0.00 0.48 0.84 0.22 _0.13 0.00 0.00
0.00 0.00 _0.13 _0.22 0.84 _0.48 0.00 0.00
0.00 0.00 0.00 0.00 0.48 0.84 0.22 _0.13
0.00 0.00 0.00 0.00 _0.13 _0.22 0.84 _0.48
0.22 _0.13 0.00 0.00 0.00 0.00 0.48 0.84
```

*6 トーナメントの階層と同じで最後の2段に特に効いている

0.84 -0.48 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 -0.13 -0.22

2.1 $D(4)$ の逆変換

$$\begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_2 & g_2 & h_0 & g_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_3 & g_3 & h_1 & g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & h_2 & g_2 & h_0 & g_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & h_3 & g_3 & h_1 & g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & h_2 & g_2 & h_0 & g_0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & h_3 & g_3 & h_1 & g_1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & g_2 & h_0 & g_0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & g_3 & h_1 & g_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ c_0 \\ a_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

2.2 Haar と Daubechies

Haar は単純で学習用に向いているが線形トレンドが通過する。
 本格的な解析には *Daubechies* を用いる。 $D(4)$ が良く用いられる。
 $D(4)$ は線形トレンドを除去するように設計されている。
 さらに $D(12)$ 等もあり、非線形挙動にも対応できる

3 景気動向指数への応用

- 景気動向指数のデータは規準化しないで生のまま用いる
- 従って *Haar Daubechies* の基底は非規準化の方を用いる

3.1 カスケード分解と周波数/期間

- カスケード分解は 2 4 8 16 32 64 (月) と e^n の窓を用いて高周波 (短期) 成分から低周波 (長期) 成分へ順に分解する
- 3月 (四半期) 6月 12月などは選べない

3.2 関数一覧

<i>classify</i>	<i>main</i>	<i>sub</i>
<i>file</i>	<i>wavelet_0.ijs</i> <i>haar_wave2.ijs</i> <i>wavelet_anal.ijs</i>	
<i>haar</i>	<i>cascade_hwt</i>	<i>pick_hwt_sub</i> <i>reverse_hwt_sub</i> <i>mat_hwt_sub</i>
<i>sna</i>	<i>wavelet_sna</i> <i>plot_cascade3</i>	<i>mk_xaxis_wavelet</i> <i>read_trend_data</i>
<i>analysis</i>	<i>anal_hwt</i> <i>anal_dwt41</i> <i>plot_anal_hwt</i> <i>plot_anal_dwt41</i>	
<i>daubechies</i>	<i>cascade_dwt40 NB. norm</i> <i>cascade_dwt41 NB. non norm</i>	<i>mat_dwt4_sub0</i> <i>dp4_0 NB. norm</i> <i>mat_dwt4_sub1</i> <i>dp4_1 NB.non norm</i>

<i>common</i>		<i>pick_scale</i> <i>pick_wavelet</i> <i>norm0</i>
<i>plot</i>	<i>plot_cascade</i> <i>plot_cascade2</i>	

5年(64月)では電力消費量にマイナスは生じない。ブッシュ・グリーンSPAN バブルも大きい

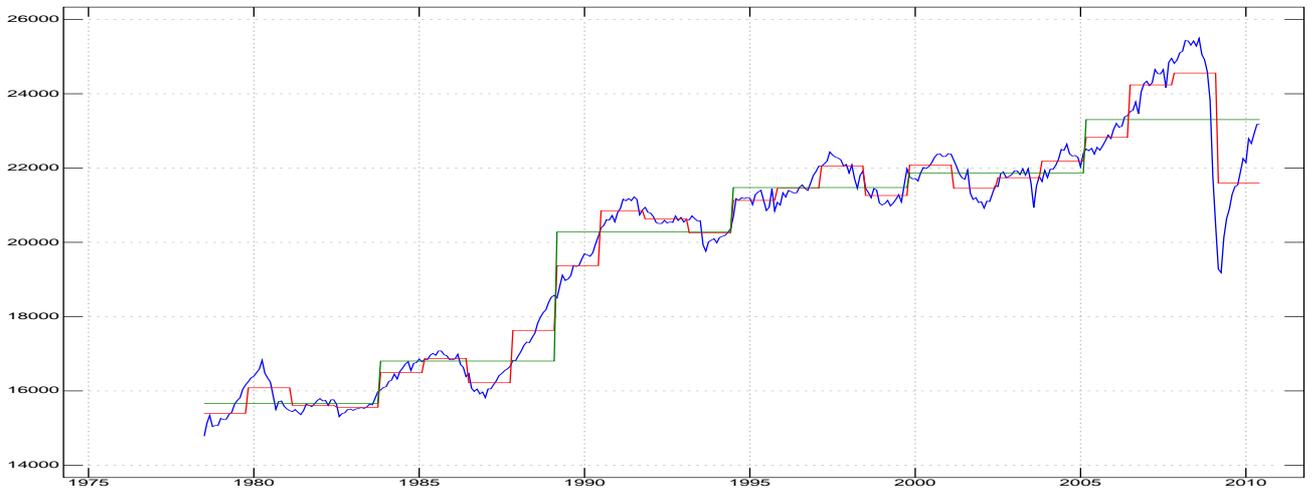


図3 C3 電力消費量 Haar(16,64)

3年(32月)では2度マイナスが生じるが減少幅は通算されて小さい

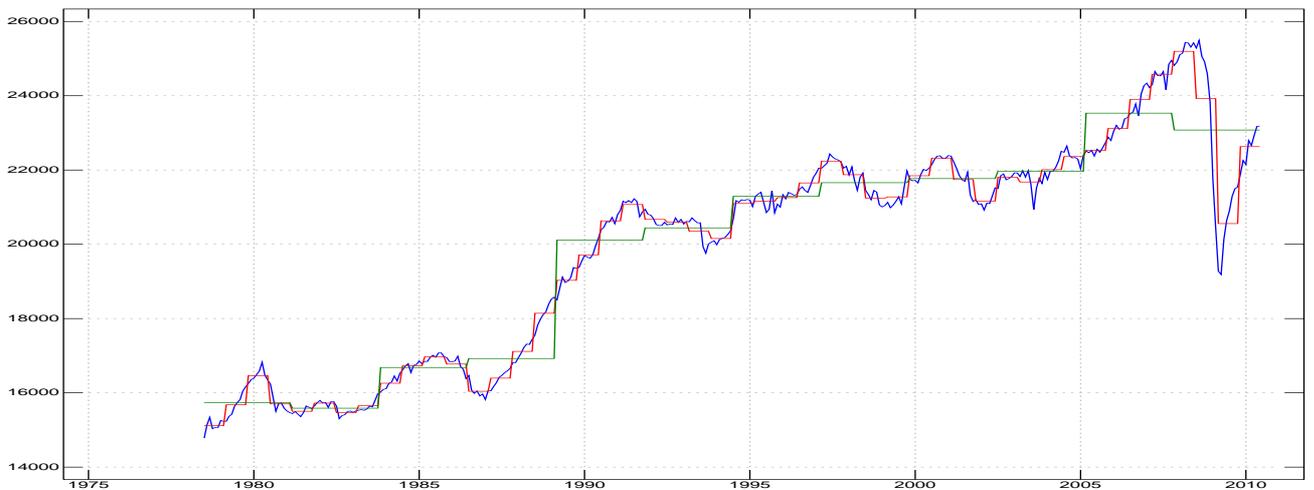


図4 C3 電力消費量 Haar(8,32)

最後の 64 月は減少に転じている。16 月のパターンも多少異なる。

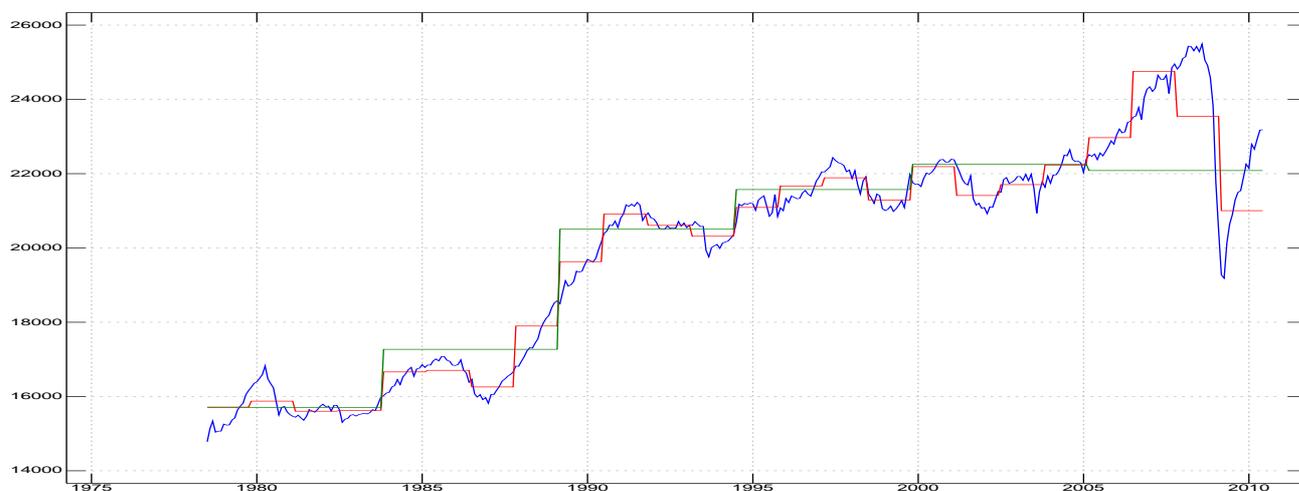


図 5 C3 電力消費量 DW (16,64)

3.3 Script

NB. Haar

```
anal_hwt=: 3 : 0
  DAT=. _384{. read_trend_data ''
  TMP=. cascade_hwt_m pick_scale DAT
  y {"1 L:0 ;("1) }."1 TMP
)

plot_anal_hwt=: 4 : 0
  DAT=. anal_hwt y NB. y is 18
  AXIS=: mk_xaxis_wave_sna |: DAT NB. x anal_hwt ''

  pd 'reset'
  pd 'key ',": x
  plot AXIS; (0,x) { DAT
  pd 'show'

)
```

NB. Daubecies

```

anal_dwt41=: 3 : 0
NB. u 18 C3(Electric Power)
DAT=. _384{. read_trend_data ''
TMP=. cascade_dwt41_m pick_scale DAT
y {"1 L:0 ;("1) }."1 TMP
)

plot_anal_dwt41=: 4 : 0
NB. 4 6 u 18 / 16 64 u C3
DAT=. anal_dwt41 y NB. y is 18
AXIS=: mk_xaxis_wave_sna |: DAT NB. x anal_hwt ''

pd 'reset'
pd 'key ',": x
plot AXIS; (0,x) { DAT
pd 'show'
)

```

References

金谷健一「これならわかる応用数学教室」共立出版 2003
Kristian Sandberg [The Daubechies wavelet transformation]
<http://amath.colorado.edu/courses/4700/2000Spr/Labs/DB/db.html>
 鎌田康一郎 稲田将一「ウェーブレットによる経済分析」日本銀行 *Working Paper Series 03-2*

Misellance

J602 is download available
<http://www.jsoftware.com>
Script is DL from
<http://japla.sakura.ne.jp>

ドビッシー基底と回り込み問題

先頭に2個のダミーを入れる方法

$$\begin{pmatrix} a_*^{n-1} \\ a_*^{n-1} \\ a_0^{n-1} \\ a_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} \\ a_3^{n-1} \\ a_4^{n-1} \\ a_5^{n-1} \\ a_6^{n-1} \\ a_7^{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_*^n \\ a_*^n \\ a_0^n \\ a_1^n \\ a_2^n \\ a_3^n \\ a_4^n \\ a_5^n \\ a_6^n \\ a_7^n \end{pmatrix}$$