財務計算あれこれ
第５回　年率、年価および期間が一定でない場合の計算式 (2)
No. 5. Formulas for Non-Fixed Rates, Annuities and Durations(2)

(株) 竹内ハガネ商行　　竹内寿一郎

１．はじめに

前回は、各時点間の期間は等間隔であり、年価および年利が一定でない場合を取り扱った【5】。本来財務計算はあらゆるケースを考慮すると、全てのパラメタが期間を通じて一定である仮定は成立しない。ここで考えるのは特に銀行の金利計算によく使われる「日歩」を意識したもので、これが期間を通じて一定であればこれまで取り上げてきたケースでカバーすることが出来るが、期間毎に「日歩」の利率が変わることになると、一般化した新たな式によって計算しなければならない。これまでの利息計算ではべき乗は整数のみが現れてきた【2】、【3】、【4】。

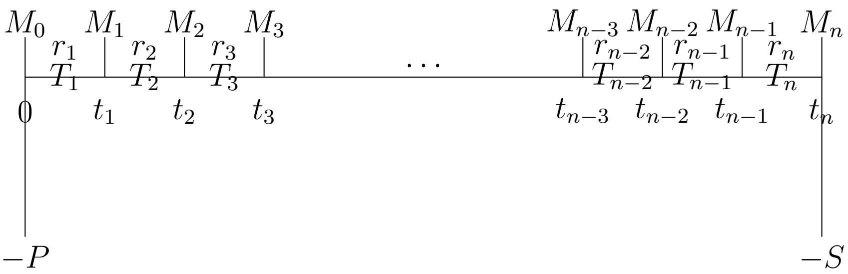
日単位で不等間隔になるとすれば、年月日のデータから経過日数を計算し、年期間に直す必要がある。エクセルの DATE 関数や DATEVALUE 関数を利用すればこれは可能であるが、J で計算するには自前で DATE 関数を作る必要があった。エクセルでは 1900 年 1 月 1 日を 1 としてそれ以降を経過日数と共に増加する、シリアルナンバーを年月日に付与することにしたのである。そうすれば 2 つの年月日間の日数はシリアルナンバーの差として出てくるから、容易に日数を計算することが出来る。

「寿暦」【6】ではエクセルと同じ発想で西暦 0000 年 1 月 1 日を 1 としてシリアルナンバーを付与することにした。紀元前の詳細については未検討ではあるが (B.C.1 年は西暦のマイナス何年になるか？)、西暦 xxxx 年 xx 月 xx 日同士の差による日数や、曜日などの計算も出来 (坂本龍馬が暗殺された日の曜日は？、関ヶ原の戦いは何曜日だったか？など)、夢があって楽しい。

「寿歴」とエクセルを使って日付の比較をしたところ、1900 年 2 月 29 日以前を除いて、693960 だけ「寿歴」のシリアルナンバーが多くなっていることが確かめられている。ということは「寿歴」で計算した日付の差はエクセルと完全に一致することが分かる。このように日付に拘泥する理由のひとつは年利 $r\%$ を実質金利として、これを実現するためには、$(1+r_1/366)^{366}$ もしくは $(1+r_2/365)^{365}$ がちょうど $r\%$ になるように r_1 ないし r_2 を求めたりするので、日付に基づく期間はかなり精密に計算することが求められるからである。

２．一般的なキャッシュフロー

それでは期間も、積立金 (返済金) も、年利率も変化する、最も一般的なキャッシュフローを以下に図示してみる。



ここで、各時点は $t_i(t_0 = 0)$、全期間は t_n、各期の長さは $T_i = t_i - t_{i-1}(i = 1, 2, \cdots, n)$、$M_0$ は初期支払額、M_n は満期支払額、各期の返済額 (獲得利益または年価に相当) は M_i、P は借入額 (投資額)、S は積立額、各期における変動利率を $r_1, r_2, \cdots, r_n$ とする

期	各期までの元利合計金額
0	M_0
1	$M_1 + M_0(1 + r_1)^{T_1}$
2	$M_2 + M_1(1 + r_2)^{T_2} + M_0(1 + r_1)^{T_1}(1 + r_2)^{T_2}$
3	$M_3 + M_2(1 + r_3)^{T_3} + M_1(1 + r_2)^{T_2}(1 + r_3)^{T_3} + M_0(1 + r_1)^{T_1}(1 + r_2)^{T_2}(1 + r_3)^{T_3}$
4	$M_4 + M_3(1 + r_4)^{T_4} + M_2(1 + r_3)^{T_3}(1 + r_4)^{T_4} + M_1(1 + r_2)^{T_2}(1 + r_3)^{T_3}(1 + r_4)^{T_4}$ $+ M_0(1 + r_1)^{T_1}(1 + r_2)^{T_2}(1 + r_3)^{T_3}(1 + r_4)^{T_4}$
$\vdots$	$\vdots$
n	$M_n + M_{n-1}(1 + r_n)^{T_n} + M_{n-2}(1 + r_{n-1})^{T_{n-1}}(1 + r_n)^{T_n} + M_{n-3}(1 + r_{n-2})^{T_{n-2}}$ $(1 + r_{n-1})^{T_{n-1}}(1 + r_n)^{T_n} + \cdots + M_1(1 + r_2)^{T_2}(1 + r_3)^{T_3} \cdots (1 + r_n)^{T_n}$ $+ \cdots + M_0(1 + r_1)^{T_1}(1 + r_2)^{T_2}(1 + r_3)^{T_3} \cdots (1 + r_n)^{T_n}$

このキャッシュフローは投資額 (借入額)P に対して各期の利得 (返済金) を M_i、その期間の年利を r_i としたときの損得計算や、月々の積立額を M_i としたときの終価 S の計算にも利用できる。

[1] 現価と終価

ゼロ期に M_0 円預けて n 年後に元利合計を受け取るという定期預金は、上の表における満期 n 期での元利合計金額の式で、$M_1 = 0, M_2 = 0, \cdots, M_n = 0$ として計算すると、

(1) S(終価)$=M_0(1 + r_1)^{T_1}(1 + r_2)^{T_2}(1 + r_3)^{T_3} \cdots (1 + r_n)^{T_n} = M_0 * R(n)$

従って現価 (P) は、

(2) P(現価)$=\dfrac{S}{(1 + r_1)^{T_1}(1 + r_2)^{T_2}(1 + r_3)^{T_3} \cdots (1 + r_n)^{T_n}} = \dfrac{S}{R(n)}$

ここで S は時点 n での金額で、$(1 + r_1), (1 + r_2), (1 + r_3), \cdots, (1 + r_n)$ は n 期間における各年毎において元利合計を齎す変動金利で、$1/R(n)$ は期間 n における金額を現価に直すための現価係数を変動金利の場合に拡張したものである。

[2] 終価と年価

まず、各年毎にに発生する金額 M_i を全て満期における終価になおすことを考える。

(3) $S_i = M_i(1 + r_{i+1})^{T_{i+1}}(1 + r_{i+2})^{T_{i+2}} \cdots (1 + r_{n-1})^{T_{n-1}}(1 + r_n)^{T_n} \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$

であるから、$S_n = M_n$、$S_0 = M_0(1+r_1)^{T_1}(1+r_2)^{T_2}\cdots(1+r_{n-1})^{T_{n-1}}(1+r_n)^{T_n} = M_0R(n)$

$$(4) \quad \begin{cases} S = \sum_{i=0}^{n} S_i = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{M_iR(n)}{R(i)} \qquad \text{ここで、}R(0)=1\text{ である} \\ \quad = M_n + M_{n-1}(1+r_n)^nT + M_{n-2}(1+r_{n-1})^{T_{n-1}}(1+r_n)^{T_n} + \cdots \\ \quad\quad +M_0(1+r_1)^{T_1}(1+r_2)^{T_2}\cdots(1+r_n)^{T_n} \end{cases}$$

[3] 現価と年価

次に各年毎にに発生する金額 M_i を全て現在価値になおすことを考える。まず、期間 i での金額 M_i を現価 P_i に直すと、

$$(5) \quad P_i = \frac{M_i}{(1+r_1)^{T_1}(1+r_2)^{T_2}\cdots(1+r_{i-1})^{T_{i-1}}(1+r_i)^{T_i}} = \frac{M_i}{R(i)} \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

であるから、$P_0 = M_0$、$P_n = \dfrac{M_n}{(1+r_1)^{T_1}(1+r_2)^{T_2}\cdots(1+r_{n-1})^{T_{n-1}}(1+r_n)^{T_n}} = \dfrac{M_n}{R(n)}$

$$(6) \quad \begin{cases} P = \sum_{i=0}^{n} P_i = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{M_i}{R(i)} \qquad \text{ここで }R(0)=1\text{ とする} \\ \quad = M_0 + \dfrac{M_1}{(1+r_1)^{T_1}} + \dfrac{M_2}{(1+r_1)^{T_1}(1+r_2)^{T_2}} + \cdots + \dfrac{M_n}{(1+r_1)^{T_1}(1+r_2)^{T_2}\cdots(1+r_n)^{T_n}} \end{cases}$$

３．例題

●例題 1　10 年で 100 万円になるように毎年積立てたとき、期首、期末それぞれで積立額を与えた時の金利は？という例題があった [2]。答えは 7%であったが、これからキャッシュフローを作成して積立額が 100 万円になるか調べてみる。ちなみにそのときの積立額は、期首で、6.76425 万円、期末で 7.23775 万円であった。

```
   nomeff=:4 : 'x*<:(1+y)^(%x)'
   effnom=: [: <: ([: >: ] % [) ^ [
   vrepnew=.% @ >: @ ([stretch 1&intrep)
   accintnew=:*/\@(1&,@vrepnew)
   accintback=:*/\. @ (,&1) @ (stretch >: @ intexpand)
NB. 日にちで与えられた利率が年７%になるための日利率を求める
   365 nomeff 0.07
0.06766491967
   366 nomeff 0.07
0.06766490254
   int=.0,0.06766490254,(3#0.06766491967),0.06766490254,(3#0.06766491967),
0.06766490254,0.06766491967
   int
0 0.06766490254 0.06766491967 0.06766491967 0.06766491967 0.06766490254
0.06766491967 0.06766491967 0.06766491967 0.06766490254 0.06766491967
   (>0{cf1)effnom int
   cf0=.((Jureki 2000;1;1),(Jureki 2001;1;1),(Jureki 2002;1;1),(Jureki
2003;1;1),(Jureki 2004;1;1),(Jureki 2005;1;1),(Jureki 2006;1;1),(Jureki 2007;1;1),(Ju
```

```
;int
   z=.([:0&,[:}.(-_1&|.))each 0{cf0
   z
0  366  365  365  365  366  365  365  365  366  365
   intlist=.0.07 10
   Mkishu=.(10#6.76425),0
   Mkimatu=.0,10#7.23775
   +/Mkishu*10 accintback intlist
100
   +/Mkimatu*10 accintback intlist
100
```

NB. 期間のリスト

```
   T=.>0{cf1
   (>:int%T)^T
1 1.07 1.07 1.07 1.07 1.07 1.07 1.07 1.07 1.07 1.07
```

NB. 日付の利率を年利率に直すと全て７％になっている

```
   */\.1&|.(>:int%T)^T
1.967151357 1.838459212 1.71818618 1.605781476 1.500730352 1.402551731
1.31079601 1.225043 1.1449 1.07 1
   +/Mkishu * */\.1&|.(>:int%T)^T
99.99996169
   +/Mkimatu * */\.1&|.(>:int%T)^T
99.99999623
```

●例題２　100 万円借りた時毎年一括払いで 10 年で完済するときの金額を与えたときの金利は？という問題で、これも金利は 7%が正解で、このときの毎年の返済額は、期首払いで 13.3063 万円、期末払いで 14.23787 万円であった。

```
   MkishuB=.(10#13.3063),0
   MkishuB
13.3063 13.3063 13.3063 13.3063 13.3063 13.3063 13.3063 13.3063 13.3063
13.3063 0
   MkimatuB=.0,10#14.23787
   MkimatuB
0 14.23787 14.23787 14.23787 14.23787 14.23787 14.23787 14.23787 14.23787
14.23787 14.23787
   +/MkishuB * 10 accintnew intlist
99.99993487
   +/MkimatuB * 10 accintnew intlist
100.0008409
```

NB. この例題を現価に直してみる

```
   +/MkishuB * %*/\(>:int%T)^T
99.99993487
   +/MkimatuB * %*/\(>:int%T)^T
100.0008409
```

【参考文献】

【1】J601 システムパッケージ (1994-2006)　：ファイナンスパッケージ、j601/system/packages/finance/interest.ijs 、j601_win.exe を解凍すると得られる

【2】竹内寿一郎（2010）：　財務計算あれこれ　第１回 __現価、終価、年価__、 JAPLA 研究会 2010.1.23 資料

【3】竹内寿一郎（2010）：　財務計算あれこれ　第２回 __期間と利率の計算式__、 JAPLA 研究会 2010.2.27 資料

【4】竹内寿一郎（2010）：　財務計算あれこれ　第３回 __内部利率の計算式__、 JAPLA 研究会 2010.3.27 資料

【5】竹内寿一郎（2010）：　財務計算あれこれ　第４回 __年率および年価が一定でない場合の計算式　(1) __、 JAPLA 研究会 2010.10.23 資料

【6】竹内寿一郎（2010）：　万年歴「寿歴」の作成、 JAPLA 研究会 2010.11.27 資料