(ＪＡＰＬＡ 2010/10/23)

『連勝の確率』について

統計数理研究所（名誉教授）　鈴木義一郎

戦績の系列で、１の表れる確率をｐ(０の表れる確率をｑ＝１－ｐ)とするとき、全ての系列のなかで、１という文字がｒまでしか継続しないような系列の集合を$S(r,n)$と表す。さらに$S(r,n)$のなかで、１が丁度ｈ回、０が(ｎ－ｈ)回表れる系列の集合を$T(h;r,n)$、その個数を$C(h;r,n)$とする。

「$S(r,n)$という系列を得る確率」$Q(p;r,n)$は

$$Q(p;r,n)=\sum_{h=0}^{n} C(h;r,n)p^h q^{n-h}$$

のように与えられる。したがって、１－$Q(p;r,n)$が(r+1)以上の連勝の表れる確率を与えることになる。

さて係数の間には、次のような“漸化関係”が成り立つ。

$$C(h;r,n)=\sum_{i=9}^{r} C(h-1;r,n-i-1)$$

$$C(0;r,n)=1,\ C(1;r,n)=r,\ C(h;r,n)={}_nC_h(0\leq h,<r)$$

```
bic=:(i.@>:!])"0@i.@>:
first=:>:@{. {."1 bic@{:
second=:#@|:({.;}.)[:}."1],.0:
new=:[:+/[:(<0 1)&|:-@#@|:{.]
change=:(>@{.,}:@{.@>@{:,new@>@{.);}.@>@{:
slide=:3 :'>{.change^:(-/$y)second y'
line=:4 :'{."1(slide^:x)first y'
coef=:[:|:i.@>:@{:line"0 1] NB. C(h;r,n)
prob=:4 :'(x^h)*(1-x)^|.h=.i.>:y'
probr=:4 :'+/"1(coef y)*x prob"0 i.>:{:y'
```

上記の漸化関係を利用して、｛$C(h;r,n)$｝を算出するための関数を左記のように定義する。

<table>
<tr><td>]C=:first 2 6</td><td>]D=:second C</td><td>change D</td><td>change^:2 D</td></tr>
<tr>
<td>1 0 0
1 2 1
1 3 3
1 4 6
1 5 10
1 6 15</td>
<td><table><tr><td>0 0 0
1 0 0
2 1 0</td><td>3 3 0
4 6 0
5 10 0
6 15 0</td></tr></table></td>
<td><table><tr><td>0 0 0
1 0 0
2 1 0
3 3 0</td><td>4 6 0
5 10 0
6 15 0</td></tr></table></td>
<td><table><tr><td>0 0 0
1 0 0
2 1 0
3 3 0
4 6 0</td><td>5 10 0
6 15 0</td></tr></table></td>
</tr>
</table>

slide C	0 line 2 6	4 line 2 6	|:(i.7)line"0 1(2 6)
0 0 0 1 0 0 2 1 0 3 3 0 4 6 2 5 10 7 6 15 16	1 1 1 1 1 1 1 1 line 2 6 0 1 2 3 4 5 6 2 line 2 6 0 0 1 3 6 10 15 3 line 2 6 0 0 0 0 2 7 16	0 0 0 0 0 1 6 5 line 2 6 0 0 0 0 0 0 0 6 line 2 6 0 0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 2 1 0 0 0 0 1 3 3 0 0 0 0 1 4 6 2 0 0 0 1 5 10 7 1 0 0 1 6 15 16 6 0 0

:coef 2 6	coef 3 6	coef 4 6
1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 2 1 0 0 0 0 1 3 3 0 0 0 0 1 4 6 2 0 0 0 1 5 10 7 1 0 0 1 6 15 16 6 0 0	1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 2 1 0 0 0 0 1 3 3 1 0 0 0 1 4 6 4 0 0 0 1 5 10 10 3 0 0 1 6 15 20 12 2 0	1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 2 1 0 0 0 0 1 3 3 1 0 0 0 1 4 6 4 1 0 0 1 5 10 10 5 0 0 1 6 15 20 15 4 0

]C3=:coef 2 3	]P3=:0.5 prob"0 i.>:3	]CP3=:C3*P3	+/"1 CP3
1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 1 0 1 3 3 0	1 0 0 0 0.5 0.5 0 0 0.25 0.25 0.25 0 0.125 0.125 0.125 0.125	1 0 0 0 0.5 0.5 0 0 0.25 0.5 0.25 0 0.125 0.375 0.375 0	1 1 1 0.875 0.5 probr 2 3 1 1 1 0.875

]p1=:0.5 probr 2 6	1-p1
1 1 1 0.875 0.8125 0.75 0.6875	0 0 0 0.125 0.1875 0.25 0.3125
]p2=:0.6 probr 2 6	1-p2
1 1 1 0.784 0.6976 0.6112 0.5248	0 0 0 0.216 0.3024 0.3888 0.4752
]p3=:0.7 probr 2 6	1-p3
1 1 1 0.657 0.5541 0.4512 0.3483	0 0 0 0.343 0.4459 0.5488 0.6517

probrl=:[:{:probr	$S(r,n)$ という系列を得る確率 $Q(p;r,n)$ を出力する関数		
0.5 probrl 4 50 0.448125	0.5 probrl 6 50 0.834667	0.5 probrl 8 50 0.95854	0.5 probrl 10 50 0.990016
0.6 probrl 4 50 0.164964	0.6 probrl 6 50 0.574411	0.6 probrl 8 50 0.833851	0.6 probrl 10 50 0.940716

下表に、成功連（１の連）の長さが３以内の場合で、成功の確率をｐ=0.5,0.6,0.7,0.8,0.9 とした場合の確率を示してみた。これらの値を１から引いた確率ｐの１人が４連勝以上する確率を与える。ｐの値が大きくなるほど、また勝負回数ｎが多くなるほど連勝の確率が大きくなる様子が読みとれる。

表：確率の値が異る場合の３連勝以内の確率

n	p=0.5	p=0.6	p=0.7	p=0.8	p=0.9
4	93.7500	87.0400	75.9900	59.0400	34.3900
5	90.6250	81.8560	68.7870	50.8480	27.8290
6	87.5000	76.6720	61.5840	42.6560	21.2680
7	84.3750	71.4880	54.3810	34.4640	14.7070
8	81.2500	66.3040	47.1780	26.2720	8.1460
9	78.3203	61.7918	41.7044	21.4354	5.8897
10	75.4883	57.5484	36.7497	17.2700	4.0638
11	72.7539	53.5738	32.3138	13.7756	2.6684
12	70.1172	49.8678	28.3968	10.9523	1.7035
13	67.5781	46.4306	24.9985	8.8001	1.1690
14	65.1306	43.2273	21.9946	7.0441	0.7826
15	62.7716	40.2440	19.3475	5.6294	0.5160
16	60.4980	37.4668	17.0199	4.5009	0.3409
17	58.3069	34.8816	14.9745	3.6036	0.2291
18	56.1951	32.4746	13.1738	2.8827	0.1524
19	54.1597	30.2337	11.5896	2.3057	0.1011
20	52.1981	28.1475	10.1960	1.8445	0.0672

r,6!:2'r=.0.5 probrl 3 20' 0.6875 0.226292 r,6!:2'r=.0.5 probrl 3 50' 0.249587 2.96026 r,6!:2'r=.0.5 probrl 3 100' 0.0394584 26.2172	r,6!:2'r=.0.5 probrl 3 150' 0.027285 93.6612 r,6!:2'r=.0.5 probrl 3 200' 0.00431361 240.842 r,6!:2'r=.0.5 probrl 3 300' 0.172586 1038.16 （17 分強）	勝負回数ｎが増えても原理的には計算が可能であるが、計算時間が膨大になる。 そこで、近似式を考えてやる方が合理的になる。