

『標本分散』と『不偏分散』

統計数理研究所(名誉教授) 鈴木義一郎

初心者に統計の講義をしていて、よく質問をされるのに、「分散を推定するのに、平均からの偏差平方値をデータ数nでなくn-1で割るのは何故か？」という問題がある。

小生のさしあたっての答えは「どちらでもよい」である。データ数nが大きければ大差ないし、またnが小さければ、分散を推定しようとするなどなどずーずーしいのである。実は区間推定などに必要なのは分散ではなく標準偏差の方である。n-1で割って平方根をとっても標準偏差の不偏推定ではない！だから、「nやn-1ではなく、n-1.5で割って平方根をとって推定値とせよ」と推奨している。

$X_1, X_2, \dots, X_n$  を、平均が  $\mu$ 、分散が  $\sigma^2$  の分布からの標本とするとき

$$\text{標本平均: } M = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

$$\text{偏差平方和: } Q = (X_1 - M)^2 + (X_2 - M)^2 + \dots + (X_n - M)^2$$

$$\text{標本分散と不偏分散: } V = Q/n, \quad s^2 = Q/(n-1)$$

に対して

$$E\{M\} = \mu, \quad E\{Q\} = (n-1)\sigma^2, \quad E\{s^2\} = \sigma^2$$

である。ところで

$$E\{s\} > \sigma$$

であるから、 $s = \sqrt{s^2}$  は  $\sigma$  の不偏推定ではない。ただし正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  の場合には

$$s_0 = \sqrt{s_0^2}; \quad s_0^2 = Q/k(n), \quad k(n) = 2 \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \right\}^2$$

が  $\sigma$  の不偏推定となる。

kn=3	4	5	6	7
1	2	3	4	5
0	0.63662	1.5708	2.54648	3.53429
c,	kn	c=6+i.5		

6 7 8 9 10

4.52707 5.52233 6.51899 7.51651 8.51459

n_tip=(M=:50+i:5),:f=:n,20, .n=:1 3 7 12 17	100個のノーマル・チップ
---	---------------

n_tip 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 1 3 7 12 17 20 17 12 7 3 1 (.M);' *{~0<f##"0 M	change=:3 :0 (M=:50+i:5),:f=:n,20, .n=:1 3 7 12 17 L={:,}.<:+\f belong=(.>{@D}*.)<: {@[ if.y=0 do.{M else.(L belong"1 y)#}.M end. ) 10 10\$,change"0 i.100																						
<table border="1"> <tr><td>45</td><td>*</td></tr> <tr><td>46</td><td>***</td></tr> <tr><td>47</td><td>*****</td></tr> <tr><td>48</td><td>*****</td></tr> <tr><td>49</td><td>*****</td></tr> <tr><td>50</td><td>*****</td></tr> <tr><td>51</td><td>*****</td></tr> <tr><td>52</td><td>*****</td></tr> <tr><td>53</td><td>*****</td></tr> <tr><td>54</td><td>***</td></tr> <tr><td>55</td><td>*</td></tr> </table>	45	*	46	***	47	*****	48	*****	49	*****	50	*****	51	*****	52	*****	53	*****	54	***	55	*	45 46 46 46 47 47 47 47 47 47 47 48 48 48 48 48 48 48 48 48 48 48 48 49 49 49 49 49 49 49 49 49 49 49 49 49 49 49 49 49 50 51 51 51 51 51 51 51 51 51 51 51 51 51 51 51 51 51 52 52 52 52 52 52 52 52 52 52 52 52 53 53 53 53 53 53 53 54 54 54 55 NB. 0-99の数值をMの範囲に変換している。
45	*																						
46	***																						
47	*****																						
48	*****																						
49	*****																						
50	*****																						
51	*****																						
52	*****																						
53	*****																						
54	***																						
55	*																						

sample=:[,[:change"0[:/~?@\$&100	ノーマル・チップからの標本抽出										
qsum=:[+/*:@(-mean=:+/%#)	「qsum」は平均偏差平方和										
dev=:3 :'v,:%:v=(qsum y)%5 4' ]S=:sample 5	「dev」は標本分散、不偏分散、それらの平方根 S;5j2"':dev"1 S=:sample"0(5\$5)										
48 49 50 50 53 (mean S),Q=:qsum S 50 14 dev S 2.8 3.5 1.67332 1.87083	<table border="1"> <tr><td>45 50 50 50 50</td><td>4.00 5.00 2.00 2.24</td></tr> <tr><td>46 49 50 52 54</td><td>7.36 9.20 2.71 3.03</td></tr> <tr><td>48 48 51 51 52</td><td>2.80 3.50 1.67 1.87</td></tr> <tr><td>48 48 50 52 53</td><td>4.16 5.20 2.04 2.28</td></tr> <tr><td>45 48 48 50 52</td><td>5.44 6.80 2.33 2.61</td></tr> </table>	45 50 50 50 50	4.00 5.00 2.00 2.24	46 49 50 52 54	7.36 9.20 2.71 3.03	48 48 51 51 52	2.80 3.50 1.67 1.87	48 48 50 52 53	4.16 5.20 2.04 2.28	45 48 48 50 52	5.44 6.80 2.33 2.61
45 50 50 50 50	4.00 5.00 2.00 2.24										
46 49 50 52 54	7.36 9.20 2.71 3.03										
48 48 51 51 52	2.80 3.50 1.67 1.87										
48 48 50 52 53	4.16 5.20 2.04 2.28										
45 48 48 50 52	5.44 6.80 2.33 2.61										

<p>A;5j2":dev"1 A=:sample"0(10\$5)</p> <table border="1"> <tr><td>48 49 50 50 53</td><td>2.80</td><td>3.50</td><td>1.67</td></tr> <tr><td>47 49 50 50 51</td><td>1.87</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>47 50 50 50 51</td><td>1.84</td><td>2.30</td><td>1.36</td></tr> <tr><td>49 50 50 50 52</td><td>1.52</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>47 49 49 51 54</td><td>1.84</td><td>2.30</td><td>1.36</td></tr> <tr><td>47 48 50 52 52</td><td>1.52</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>49 50 51 53 53</td><td>0.96</td><td>1.20</td><td>0.98</td></tr> <tr><td>48 49 50 51 53</td><td>1.10</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>46 48 49 49 50</td><td>5.60</td><td>7.00</td><td>2.37</td></tr> <tr><td>48 50 50 50 53</td><td>2.65</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>4.16</td><td>5.20</td><td>2.04</td></tr> <tr><td></td><td>2.28</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>2.56</td><td>3.20</td><td>1.60</td></tr> <tr><td></td><td>1.79</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>2.96</td><td>3.70</td><td>1.72</td></tr> <tr><td></td><td>1.92</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>1.84</td><td>2.30</td><td>1.36</td></tr> <tr><td></td><td>1.52</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>2.56</td><td>3.20</td><td>1.60</td></tr> <tr><td></td><td>1.79</td><td></td><td></td></tr> </table>	48 49 50 50 53	2.80	3.50	1.67	47 49 50 50 51	1.87			47 50 50 50 51	1.84	2.30	1.36	49 50 50 50 52	1.52			47 49 49 51 54	1.84	2.30	1.36	47 48 50 52 52	1.52			49 50 51 53 53	0.96	1.20	0.98	48 49 50 51 53	1.10			46 48 49 49 50	5.60	7.00	2.37	48 50 50 50 53	2.65				4.16	5.20	2.04		2.28				2.56	3.20	1.60		1.79				2.96	3.70	1.72		1.92				1.84	2.30	1.36		1.52				2.56	3.20	1.60		1.79			<p>B;5j2":dev"1 B=:sample"0(10\$5)</p> <table border="1"> <tr><td>48 48 49 51 53</td><td>3.76</td><td>4.70</td><td>1.94</td><td>2.17</td></tr> <tr><td>49 49 50 51 53</td><td>2.24</td><td>2.80</td><td>1.50</td><td>1.67</td></tr> <tr><td>49 50 50 51 53</td><td>1.84</td><td>2.30</td><td>1.36</td><td>1.52</td></tr> <tr><td>47 47 48 49 52</td><td>3.44</td><td>4.30</td><td>1.85</td><td>2.07</td></tr> <tr><td>47 48 50 50 51</td><td>2.16</td><td>2.70</td><td>1.47</td><td>1.64</td></tr> <tr><td>47 50 52 54 54</td><td>7.04</td><td>8.80</td><td>2.65</td><td>2.97</td></tr> <tr><td>47 51 52 52 53</td><td>4.40</td><td>5.50</td><td>2.10</td><td>2.35</td></tr> <tr><td>47 50 50 50 52</td><td>2.56</td><td>3.20</td><td>1.60</td><td>1.79</td></tr> <tr><td>48 50 51 52 53</td><td>2.96</td><td>3.70</td><td>1.72</td><td>1.92</td></tr> <tr><td>48 49 50 50 51</td><td>1.04</td><td>1.30</td><td>1.02</td><td>1.14</td></tr> </table>	48 48 49 51 53	3.76	4.70	1.94	2.17	49 49 50 51 53	2.24	2.80	1.50	1.67	49 50 50 51 53	1.84	2.30	1.36	1.52	47 47 48 49 52	3.44	4.30	1.85	2.07	47 48 50 50 51	2.16	2.70	1.47	1.64	47 50 52 54 54	7.04	8.80	2.65	2.97	47 51 52 52 53	4.40	5.50	2.10	2.35	47 50 50 50 52	2.56	3.20	1.60	1.79	48 50 51 52 53	2.96	3.70	1.72	1.92	48 49 50 50 51	1.04	1.30	1.02	1.14
48 49 50 50 53	2.80	3.50	1.67																																																																																																																																
47 49 50 50 51	1.87																																																																																																																																		
47 50 50 50 51	1.84	2.30	1.36																																																																																																																																
49 50 50 50 52	1.52																																																																																																																																		
47 49 49 51 54	1.84	2.30	1.36																																																																																																																																
47 48 50 52 52	1.52																																																																																																																																		
49 50 51 53 53	0.96	1.20	0.98																																																																																																																																
48 49 50 51 53	1.10																																																																																																																																		
46 48 49 49 50	5.60	7.00	2.37																																																																																																																																
48 50 50 50 53	2.65																																																																																																																																		
	4.16	5.20	2.04																																																																																																																																
	2.28																																																																																																																																		
	2.56	3.20	1.60																																																																																																																																
	1.79																																																																																																																																		
	2.96	3.70	1.72																																																																																																																																
	1.92																																																																																																																																		
	1.84	2.30	1.36																																																																																																																																
	1.52																																																																																																																																		
	2.56	3.20	1.60																																																																																																																																
	1.79																																																																																																																																		
48 48 49 51 53	3.76	4.70	1.94	2.17																																																																																																																															
49 49 50 51 53	2.24	2.80	1.50	1.67																																																																																																																															
49 50 50 51 53	1.84	2.30	1.36	1.52																																																																																																																															
47 47 48 49 52	3.44	4.30	1.85	2.07																																																																																																																															
47 48 50 50 51	2.16	2.70	1.47	1.64																																																																																																																															
47 50 52 54 54	7.04	8.80	2.65	2.97																																																																																																																															
47 51 52 52 53	4.40	5.50	2.10	2.35																																																																																																																															
47 50 50 50 52	2.56	3.20	1.60	1.79																																																																																																																															
48 50 51 52 53	2.96	3.70	1.72	1.92																																																																																																																															
48 49 50 50 51	1.04	1.30	1.02	1.14																																																																																																																															
<p>C;5j2":dev"1 C=:sample"0(10\$5)</p> <table border="1"> <tr><td>45 47 49 51 51</td><td>5.44</td><td>6.80</td><td>2.33</td><td>2.61</td></tr> <tr><td>48 49 50 52 52</td><td>2.56</td><td>3.20</td><td>1.60</td><td>1.79</td></tr> <tr><td>48 49 50 50 51</td><td>1.04</td><td>1.30</td><td>1.02</td><td>1.14</td></tr> <tr><td>48 49 50 51 52</td><td>2.00</td><td>2.50</td><td>1.41</td><td>1.58</td></tr> <tr><td>46 47 49 50 51</td><td>3.44</td><td>4.30</td><td>1.85</td><td>2.07</td></tr> <tr><td>46 47 50 50 52</td><td>4.80</td><td>6.00</td><td>2.19</td><td>2.45</td></tr> <tr><td>49 49 49 51 53</td><td>2.56</td><td>3.20</td><td>1.60</td><td>1.79</td></tr> <tr><td>50 50 51 51 52</td><td>0.56</td><td>0.70</td><td>0.75</td><td>0.84</td></tr> <tr><td>47 48 48 49 52</td><td>2.96</td><td>3.70</td><td>1.72</td><td>1.92</td></tr> <tr><td>47 49 51 51 51</td><td>2.56</td><td>3.20</td><td>1.60</td><td>1.79</td></tr> </table>	45 47 49 51 51	5.44	6.80	2.33	2.61	48 49 50 52 52	2.56	3.20	1.60	1.79	48 49 50 50 51	1.04	1.30	1.02	1.14	48 49 50 51 52	2.00	2.50	1.41	1.58	46 47 49 50 51	3.44	4.30	1.85	2.07	46 47 50 50 52	4.80	6.00	2.19	2.45	49 49 49 51 53	2.56	3.20	1.60	1.79	50 50 51 51 52	0.56	0.70	0.75	0.84	47 48 48 49 52	2.96	3.70	1.72	1.92	47 49 51 51 51	2.56	3.20	1.60	1.79	<p>D;5j2":dev"1 D=:sample"0(10\$5)</p> <table border="1"> <tr><td>50 51 51 52 54</td><td>1.84</td><td>2.30</td><td>1.36</td><td>1.52</td></tr> <tr><td>47 48 49 49 51</td><td>1.76</td><td>2.20</td><td>1.33</td><td>1.48</td></tr> <tr><td>46 49 50 50 51</td><td>2.96</td><td>3.70</td><td>1.72</td><td>1.92</td></tr> <tr><td>50 51 51 52 53</td><td>1.04</td><td>1.30</td><td>1.02</td><td>1.14</td></tr> <tr><td>48 49 49 50 51</td><td>1.04</td><td>1.30</td><td>1.02</td><td>1.14</td></tr> <tr><td>49 50 50 51 53</td><td>1.84</td><td>2.30</td><td>1.36</td><td>1.52</td></tr> <tr><td>49 49 49 51 51</td><td>0.96</td><td>1.20</td><td>0.98</td><td>1.10</td></tr> <tr><td>50 51 52 53 54</td><td>2.00</td><td>2.50</td><td>1.41</td><td>1.58</td></tr> <tr><td>47 48 51 51 55</td><td>7.84</td><td>9.80</td><td>2.80</td><td>3.13</td></tr> <tr><td>50 51 52 52 54</td><td>1.76</td><td>2.20</td><td>1.33</td><td>1.48</td></tr> </table>	50 51 51 52 54	1.84	2.30	1.36	1.52	47 48 49 49 51	1.76	2.20	1.33	1.48	46 49 50 50 51	2.96	3.70	1.72	1.92	50 51 51 52 53	1.04	1.30	1.02	1.14	48 49 49 50 51	1.04	1.30	1.02	1.14	49 50 50 51 53	1.84	2.30	1.36	1.52	49 49 49 51 51	0.96	1.20	0.98	1.10	50 51 52 53 54	2.00	2.50	1.41	1.58	47 48 51 51 55	7.84	9.80	2.80	3.13	50 51 52 52 54	1.76	2.20	1.33	1.48																														
45 47 49 51 51	5.44	6.80	2.33	2.61																																																																																																																															
48 49 50 52 52	2.56	3.20	1.60	1.79																																																																																																																															
48 49 50 50 51	1.04	1.30	1.02	1.14																																																																																																																															
48 49 50 51 52	2.00	2.50	1.41	1.58																																																																																																																															
46 47 49 50 51	3.44	4.30	1.85	2.07																																																																																																																															
46 47 50 50 52	4.80	6.00	2.19	2.45																																																																																																																															
49 49 49 51 53	2.56	3.20	1.60	1.79																																																																																																																															
50 50 51 51 52	0.56	0.70	0.75	0.84																																																																																																																															
47 48 48 49 52	2.96	3.70	1.72	1.92																																																																																																																															
47 49 51 51 51	2.56	3.20	1.60	1.79																																																																																																																															
50 51 51 52 54	1.84	2.30	1.36	1.52																																																																																																																															
47 48 49 49 51	1.76	2.20	1.33	1.48																																																																																																																															
46 49 50 50 51	2.96	3.70	1.72	1.92																																																																																																																															
50 51 51 52 53	1.04	1.30	1.02	1.14																																																																																																																															
48 49 49 50 51	1.04	1.30	1.02	1.14																																																																																																																															
49 50 50 51 53	1.84	2.30	1.36	1.52																																																																																																																															
49 49 49 51 51	0.96	1.20	0.98	1.10																																																																																																																															
50 51 52 53 54	2.00	2.50	1.41	1.58																																																																																																																															
47 48 51 51 55	7.84	9.80	2.80	3.13																																																																																																																															
50 51 52 52 54	1.76	2.20	1.33	1.48																																																																																																																															

<pre>order=:3 :0 Q=(qsum=.:+/*:@(-mean=+/%#)y /: (%:4.02)-%:Q%5,4,+*:*!@&lt;:2.5 ) order S</pre>	<pre>S 48 49 50 50 53 ]Q=:qsum S 14 ]c=:+*:*!@&lt;:2.5</pre>	<pre>]s=%:Q % 5,4,c 1.67332 1.87083 1.99027 ]d=: s-%:4.02 0.331674 0.134165 0.01472 /: d</pre>
--	--	--

2 1 0		3.53429	2 1 0	
]:order"1 A	]:order"1 B	]:order"1 C	]:order"1 D	
2 2 2 2 0 0 2 2 2 2	0 2 2 1 2 0 0 2 2 2	0 2 2 2 1 0 2 2 2 2	2 2 2 2 2 2 2 0 2	
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	1 1 1 0 1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 0 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	
0 0 0 0 2 2 0 0 0 0	2 0 0 2 0 2 2 0 0 0	2 0 0 0 2 2 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 2 0	

normal=:3 :'_6+(+/?(12,y)\$1000)%1000'	k n=:3 :'+:*(!&<=:y)!&<=:y-1'
order1=:3 :/'1 1-%:y%"0 1(5 4 3.53429)'	qsum=.:+/*:@(-mean=+/%#)
]N1=:normal"1(10, 5)	]N2=:normal"1(10,5)
1.105 0.513 _0.846 0.328 _0.275	0.755 1.54 _0.166 _1.56 _1.208
_1.112 _0.284 _0.221 _0.949 _0.556	_0.945 0.932 0.538 0.922 _1.875
0.421 0.242 0.852 0.404 1.127	1.332 0.178 0.086 _0.336 0.341
0.366 0.026 1.028 1.321 _0.249	0.135 _1.142 1.038 1.55 _0.131
1.201 _2.261 _0.63 _1.41 1.383	_0.378 0.211 0.28 _0.74 0.047
1.276 0.893 0.95 0.605 _0.678	0.836 _0.281 1.425 _0.843 _1.018
1.994 _0.674 0.656 _0.083 0.853	0.354 _1.214 _0.702 _0.218 0.666
_0.662 1.574 2.023 0.273 _0.547	0.653 _0.83 1.288 0.678 _0.67
0.765 _0.613 0.828 0.425 2.02	1.11 _0.613 0.235 _1.327 _0.176
2.343 0.249 1.887 0.468 0.423	1.1 0.357 1.594 0.733 1.319
]Q1=:qsum"1 N1	
2.24699 0.626401 0.539431 1.75645 10.2626 2.29821 4.08704 5.9658 3.56148 9.50512	
]Q2=:qsum"1 N2	
6.78038 6.38017 1.52984 4.39899 0.748334 4.55262 2.3348 3.4324 3.33611 5.74234	

order1 Q1	order1 Q2	:order1 qsum"1 normal"1(10,5)
2 1 0	0 1 2	2 0 0 2 0 2 0 2 2 0
2 1 0	0 1 2	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
2 1 0	2 1 0	0 2 2 0 2 0 2 0 0 2
2 1 0	1 0 2	:order1 qsum"1 normal"1(10,5)
0 1 2	2 1 0	2 0 0 2 2 0 2 0 2 2
2 1 0	0 1 2	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 0	2 1 0	0 2 2 0 0 2 0 2 0 0
0 1 2	2 1 0	:order1 qsum"1 normal"1(10,5)
2 1 0	2 1 0	2 0 2 0 2 2 2 2 0 0
0 1 2	0 1 2	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
		0 2 0 2 0 0 0 0 2 2