差分グリッドを用いた偏微分方程式の数値解法
双曲型・波動方程式

SHIMURA Masato
JCD02773@nifty.ne.jp

2010 年 8 月 2 日

目次

概要

振動方程式の数値解法の事例
numeric solution of the wave equation

1 双曲型 2 階偏微分方程式

1.1 振動と波形

振動方程式のモデルはピアノやギターの弦の振動、パイプの振動、信号の伝送など様々な現象で見受けられる。

波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

初期条件

$$u(u, t_0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y_0) = g(x)$$

Dirichlet 境界条件

$$u(A, t) = \alpha(t)$$

$$u(B, t) = \beta(t)$$

c は物理的な波動の速度
$\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ は差分上の情報伝達速度

$$c\frac{\Delta x}{\Delta t} \leq t$$

2 次元、3 次元波動方程式の例

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

諸現象として 2 面に波及することは珍しいものではないが、2 階の偏微分方程式に組み上げ、解析解には次のような手順が必要である。

1. 変数分離定数による変数分離
2. 2 つの常備分方程式としての解を求め
3. 2 つの解を合成し
4. 初期条件と境界条件に相応する数値を求め
5. (3) に組み込む

1.2　2 階差分近似

x 軸は Δx で分割し位置を表す
y 軸は Δt で分割し時間軸とする。
2 階差分近似の（一般）式

$$f'' = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

波動方程式の 2 階差分近似

$$\frac{w_j^{(n+1)} - 2w_j^{(n)} + wj^{(n-1)}}{(\Delta t)^2} = c^2 \frac{w_{j-1}^{(n)} - 2w_j^{(n)} + wj + 1^{(n)}}{(\Delta x)^2}$$

$w_j^{(n)} \simeq u(x_j, t_n)$ として $w_j^{(n+1)}$ について明示的に表す（陽解法）

$$w_j^{(n+1)} = \lambda w_{j-1}^{(n)} + 2(1-\lambda) w_j^{(n)} + \lambda w_{j+1}^{(n)} - \lambda w_j^{(n-1)} \tag{1}$$

$\lambda = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2$ とする
$t = t_{n+1}$は $T = t_n$と $t = t_{n-1}$ で表すことができる

$$w_j^{(1)} = \lambda w_{j-1}^{(0)} + 2(1-\lambda) w_j^{(0)} + \lambda w_{j+1}^{(0)} - \lambda w_j^{(-1)} \tag{2}$$

最後の $w_j^{(-1)}$ を求めるため初期条件を (x_j, t_0) で微分し $\frac{\partial u}{\partial t}$ を中心 2 階差分で置き換える

$$\frac{w_j^{(1)} - w_j^{(-1)}}{2\Delta t} = g_j \Longrightarrow w_j^{(-1)} = w_j^{(1)} - 2\Delta t g_j \tag{3}$$

(4) 式を（3）式に代入し $w_j^{(1)}$ を求める

$$w_j^{(1)} = \frac{1}{2}\lambda w_{j-1}^{(0)} + (1-\lambda) w_j^{(0)} + \frac{1}{2}\lambda w_{j+1}^{(0)} + \Delta t g_i \tag{4}$$

$f(x), g(x)$ であらわし、初期条件 u を計算する

$$w_j^{(1)} = \frac{1}{2}\lambda f_{j-1} + (1-\lambda) f_j + \frac{1}{2}\lambda f_{j+1} + \Delta t g_i \tag{5}$$

1.3 Examples

- 波動方程式
  wave equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad t > 0$$

- 境界条件と初期条件
  boundary condition and initial condition

$$\begin{array}{lll} \text{境界条件} & u(0,t) = -sin\frac{1}{5} & , \quad u(1,t) = sin(1 - \frac{t}{5}) \\ \text{初期条件} & u(x,0) = sinx & , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -\frac{1}{5}cosx \end{array}$$

- 計算の条件と次に限定する

$$\lambda \le 1$$

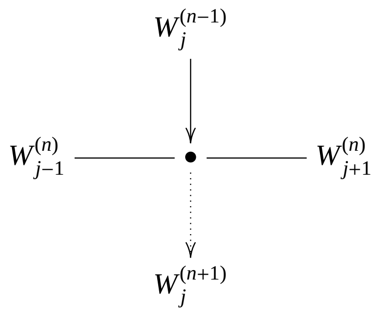
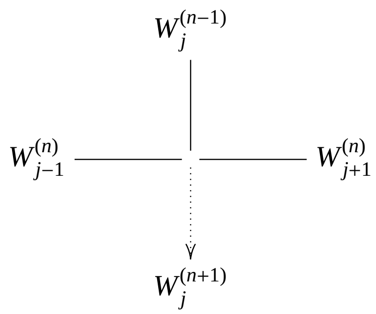
$$\Delta t \le \frac{\Delta x}{c}$$

- Script を書く前に

$$\begin{array}{llll} c^2 = \dfrac{1}{25} & \longleftrightarrow & c = \dfrac{1}{5} & \\ \Delta t = 5\Delta x & \longleftrightarrow & \Delta x = \dfrac{1}{5} & \longleftrightarrow \quad \Delta t = 1 \\ \lambda = 1 \text{ とする} & & & \\ u(x,0) = sinx & , & & \end{array}$$

1.4　伝搬の模式

- 差分グリッド

$\lambda = \left(\dfrac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2$		$w_j^{(n+1)} = \lambda w_{j-1}^{(n)} + 2(1 - \lambda)w_j^{(n)} + \lambda w_{j+1}^{(n)} - \lambda w_j^{(n-1)}$
$\lambda = 1$		$w_j^{(n+1)} = w_{j-1}^{(n)} + w_{j-1}^{(n)} - w_j^{(n-1)}$ 3 点を計算すればよい

- 端点

$startgrid(x)$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	
W^0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	$f_0 = sinx$
W^1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	$\frac{1}{2}(f_{j-1} + f_{j+1}) + g_j$
W^2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	$w^{(n)}_{j-1} + w^{(n)}_{j-1} - w^{(n-1)}_j$

伝搬のアルゴリズム確認のため途中の計算は省略し右に式のみ与えた
進行波の伝搬する様子の模式。右の関数が被さる

1.5　Example の計算結果

```
 (f0  pdiff_wav0_conj g0) 5
        0    0.198669    0.389418 0.564642 0.717356 0.841471
_0.198669 _0.00130414    0.197444  0.38832 0.563715 0.717356
_0.389418   _0.199895 _0.00240239 0.196517  0.38832 0.564642
```

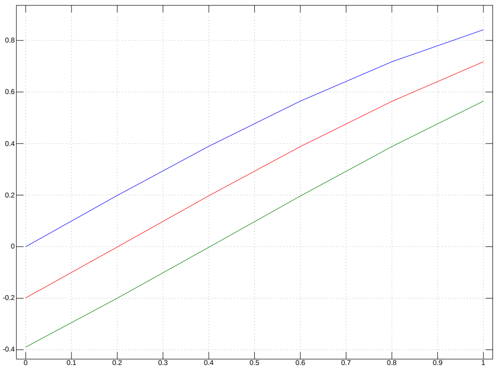
$$
\begin{array}{rl}
w^0 = f_0 = sinx & \text{初期値を初期条件で与える} \\
w^1 = \frac{1}{2}(f_{j-1} + f_{j+1}) + g_j & \text{もう一つの初期条件を加味} \\
w^2 = w^{(n)}_{j-1} + w^{(n)}_{j-1} - w^{(n-1)}_j & w^0, w^1\text{が決まったので計算可能}
\end{array}
$$

- 関数（動詞）を左右 (f0,g0) に取るので接続詞（2 : 0) で定義した
- 右引数の数値（5）は x 軸の 0-1 を分割する数 (いまのところ奇数限定）

模式の数値による再現

$startgrid(x)$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
W^0	0	0.1986	0.3894	0.5646	0.7173	0.8414
W^1	−0.1986	−0.0013	0.1974	0.3883	0.5637	0.7173
W^2	−0.3894	−0.1998	−0.0024	0.1965	0.3883	0.5646

```
plot STR; (f0  pdiff_wav0_conj g0) 5
```



2 Script

- $f0, g0$

```
f0=: 3 : ' sin y'         NB. f
g0=: 3 : ' _1r5 * cos y' NB. g
```

- main 計算手順

```
 pdiff_wav0_conj =: 2 : 0
NB.  (f0  pdiff_wav0_conj g0) 5
STR=: (% y)*  i.>: y
W0=: u STR        NB. f0
W01=: (u wav_sub0_conj v) STR NB. f1
W1=: (- 1{W0), (}. }: W01), _2{ W0
TMP=. (<W0),<W1
for_ctr. i. <: -: <: y do.
ctr=. ctr+2
TMP0=. (- ctr{W0),(wav_sub1 TMP),(- >: ctr){W0 NB. f2
```

```
TMP=. TMP,<TMP0
end.
;("1) ,. TMP
)
```

- $f + g$

```
wav_sub0_conj=: 2 : 0
NB.   (f0 wav_sub0_conj g0) STR
NB.  f + g
NB. 1r2 (fj-1 + fj+1)
WX0=: -: +/ (u }. y,0)  ,: u  }: 0,y
WX0 +  v  y  NB. f+ g
)
```

- $w(n+1) = w(n)j - 1 + w(n)j + 1 - w(n-1)j$

```
wav_sub1=: 3 : 0
NB. w(n+1) = w(n)j-1 + w(n)j+1 - w(n-1)j
WN=.>{: y           NB. W(n)
WN0=: }.@}: >_2{ y  NB. W(n-1)
TMP2=. }.@}: +//. (}. WN) ,: }: WN NB.W(n)j-1 +W(n)j+1
TMP2-WN0            NB. W(n)j+- - W(n-1)j
)
```

3 References

Brain Bradie [Numerical Analsis] Pearson education 2006

Miscellance

J602 is free download available

`http://www.jsoftware.com`

Script is in

`http://japla.sakura.ne.jp`