速報:　　　階数 の 問題

Problems about Rank

中野嘉弘 （札幌市南区、88 歳）

NAKANO Yoshihiro (Sapporo, JAPAN)

yoshihiro@river.ocn.ne.jp,　　FAX 専 011-588-3354

線形代数で最大の難問の問答。

0. は し が き

Yahoo 知恵袋なる面白い Web 番組がある。 歴史部門や数学・物理部門が中々、有益である。 最近(2010/02/19 00.37) に、表題の如き質問「階数の問題で」が出現、大学の教養レベルの数学での難解の在り場が明らかになった。
学生諸君、可也、苦労しているようだ。 その援助をしたい。

1. 基本的 な 問題 の 例

所謂、基本変形を繰り返して、階段行列を作り、目的を達する。 上述した例は、これである。

与行列 kai3

```
1  2  1
2  3  1
1  1  0 。
```

に対し、第 1 行の 2 倍を、第 2 行から引き、 第 1 行を、第 2 行から引くと、

```
1  2  1
0 -1 -1
0 -1 -1 。
```

これに対し、第 2 行、第 3 行を -1 で割ると、

```
1  2  1
0  1  1
0  1  1 。
```

第 2 行の 2 倍を、第 1 行から引き、 第 2 行を第3行から引く、

```
1  0 -1
0  1  1
0  0  0 。
```

ゼロ・ベクトル （0　0　0） は、1 つだけである。
非ゼロ・ベクトル は 2 つ であるから、
階数 = 2　と云うことで、よろしいでしょうか？

こう云う質問であるが、いじらしい限りである。

もしも、この学生が工業高専の例えば、電子工学科だとしよう。
そして、ロボット・コンテストでアイデアの限りを絞って優勝を
狙っていたとしたら、全くお気の毒だ。
こんな、詰まらない、計算に苦労して居るらしいのだから？

この手の質問・回答は Yahoo 知恵袋でワンサとお目に掛かれる。

今の「質問」への、回答例は、一見ご立派なもので、

「正解です。 おめでとう。
今の場合は、残った 第 1 行 （1 0 -1） と、第 2 行 （0 1 1 ）
の二つが独立になります。
独立なベクトルが 2 つ なので、階数は 2 です。」

2.　正解だと云う回答は正しいか？

これが、問題なのだ！

1） 階数 = 2、それはは正しいだろう。

2） 残った非ゼロ・ベクトルは独立であろうか？

回答者は何も、チェックはしていない。

「中野のチェック」

第 1 行非ゼロ・ベクトル V1 = （1 0 -1） の
大きさ = √（2） である。

第 2 行非ゼロ・ベクトル V2 = （0 1 1） も
大きさ = √（2） である。

これら、2 つのベクトルの内積は、
ベクトルの交角を θ として、

$$\sqrt{(2)}\cdot\sqrt{(2)}\cdot\cos\theta =$$
$$1\cdot 0 + 0\cdot 1 - 1\cdot 1 = -1$$

$$\therefore \cos\theta = -1/2$$

即ち、 θ = 120 度（90 度にあらず）。
かくて、2 つのベクトルは、直交せず、 平行成分を持つ
ので、独立とは云えない。

つまり、折角の長々しい計算が、最後では誤答となっている。

● この手の無駄骨は、よく見掛けるご苦労話である。
なんとか、せにゃならん！

3． もっと簡便な階数の計算が欲しい。

J 言語の素養があれば、もう少しましな方法に気付こう。

1） 原行列式の行列式を計算する。

det kai3 -> - 1.66533e-16 （殆ど ゼロ）

つまり、3 次の連立方程式としては、解は無いと云える。

次に、2 次の小行列式、例えば kai2 として

```
 3  1
1  0
```

を選ぶ。 その行列式の計算 det kai2 -> -1 （ゼロならず）

即ち、2 次の連立方程式としては、解を持つ。

こう云う状況の事を、

「原行列の階数は 3 に非ず、 階数は 2 である。」 と云う

のでしたね。

det の計算さえ出来れば良いので、別に基本変形に苦労する必要は
無いのである。

2） 独立な 2 つ のベクトルを見つける方法：

基本変形よりも、グラム・シュミットの分解法を用いるのが速い。

J 言語によるプログラム（本稿末尾）でトライした。

```
gramschmidt kai3
```

```
与行列  1  2  1
     2  3  1
     1  1  0

分解後  1   2   1
    0.5  0  -0.5
     0  0    0
```

（規格化計算部分は、掲載を省いた。）

得られたベクトル

B1 = (1 2 1)、 B2 = (0.5 0 -0.5)

内積 B1･B2 = 1･0.5 + 2･0 - 1･0.5 = 0

これら、2 つのベクトルは、直交している。

互いに、独立であると出来る。

4. む す び

J 言語の素養があれば、線形代数のゴチャゴチャした問題を
手速く、処理出来る可能性が増す。

偉そうな事を並べたが、八十八翁の思わぬ勘違いなど、
宜しく、コメント下さい。

● スクリプト Gramschmidt 関数

```
 gramschmidt=: 3 : 0

wr  x1 =. {.  y
wr  x2=. 1{ y
wr  x3=. {:y
wr b1=. x1
wr b2=. x2 - (((b1 idot x2)%(b1 idot b1)) * b1)
 b31=. x3 -(((b1 idot x3)%(b1 idot b1)) * b1)
 b32=.(((b2 idot x3)%(b2 idot b2)) * b2)
wr b3=. b31-b32
NB. normalize
 b1a=.%: +/(b1^2)
wr c1 =.b1 % b1a
  b2a=.%: +/(b2^2)
wr c2 =.b2 % b2a
 b3a=.%: +/(b3^2)
 c3 =.b3 % b3a
 )
```