ゲーム理論の諸相 (混合戦略とロジット均衡)

SHIMURA Masato
jcd02773@nifty.com

2010 年 4 月 28 日

目次

概要

◊ ゲーム理論は社会の諸々の様相で社会の常識に潜む虚構を見せてくれる。多くのゲームは混合戦略であるがその計算は込み入っている。混合戦略のアルゴリズムを詳しく述べ、マトリクスを利用した簡便な方法を紹介する。

◊ 全ての人が（正解の）怜悧なナッシュ均衡を選択する訳ではない。選択の分布として提案されているロジット均衡を動かしてみる。

1 ゲーム理論の定跡

ゲーム理論は 2×2 では 4 または 8 個 $3 times 3$ では 9 や 18 個の数値（利得行列）で効率よく社会のシュミレーションができる。ゲーム理論の良く練られた利得表は将棋や頭脳オリンピック種目の囲碁、コントラクトブリッジの定跡（石）やハンドを見ているようで楽しい。しかし、経済学やゲーム理論は前提とするヒューマニティーを限定しており、社会の実相をえぐりだす結果にはしっくりしないことも多い。

戦略型の利得行列を次で表す

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}$$

■プレゼントゲーム　同時に A はリンゴを B に贈り、B は蜜柑を A に贈る。AB とも損得に抜け目なく、ひたすら相手に喜んで貰うという善人ではない。

$A \backslash B$		B_0		B_1	
	リンゴ \ 蜜柑	おいしい	蜜柑	酸っぱい	蜜柑
A_0	おいしいリンゴ	5	5	−10	10
A_1	酸っぱいリンゴ	10	−10	−5	−5

- このプレゼントゲームはゼロサムゲームである。
- 自分の利得を第一と考えるプレーヤーの支配戦略とミニマックス解は（酸っぱいリンゴ; 酸っぱい蜜柑）(-5,-5) である。
- この解 (d) がナッシュ均衡となる。
- 一方パレート最適はおいしいを含む a,b,c である。(経済人は利己的で黄金の恵みにあり着けない)

これは環境汚染などに置き換えることができ、濡れ手のままのナシュ均衡、犠牲を伴うパレート最適は厚生経済学でも応用されている。

■ガソリンスタンドのジレンマ　囚人のジレンマのガソリンスタンド・バージョン。

$A\backslash B$	現状	維持	値	下げ
現状維持	3	3	0	4
値下げ	4	0	1	1

支配戦略は裏切りで、利得は少なくなる。 (値下げ:値下げ) がナッシュ均衡

■公園の清掃

$A\backslash B$	参加	する	さぼ値	る
参加する	1	1	-1	2
さぼる	2	-1	0	0

（出典　佐々木表 3 － 1）

支配戦略があり（さぼる:さぼる）がナッシュ均衡である

■鹿狩りゲーム　鹿狩りの最中に目の前を兎が走った。持ち場を離れると鹿は狩れないが目先の兎を得ることができる。ジャン · ジャック · ルソーの著作をゲームに組み立てたもの

$A\backslash B$	鹿		兎	
鹿	4	4	0	3
兎	3	0	2	2

（出典　川越 table6.1)

- ミニマックス解は（鹿:鹿）
- 支配戦略は（兎:兎）
- 混合戦略は　$(\frac{2}{3}\frac{1}{3} : \frac{2}{3}\frac{1}{3})$ で鹿と兎である。

2　混合戦略の解法

純粋戦略での支配戦略が存在しないことは多く、ゲームの多くが混合戦略になる。しかし混合戦略の計算は不等式で説明する場合が多く複雑である。ここでは利得表からプログラムで直ちに解く方法を掲げる。

2.1　2×2 の場合

デモ隊鎮圧ゲームでの A=軍やボクシングでの A=ボクサー A とする。

$A\backslash B$		左折 (y)	右折 $(1-y)$
攻撃	x	21	-3
静観	$1-x$	-9	12

(出典 平下 文献参照)

混合戦略　　　　　　　　展開すると

$A\backslash B$	y	$1-y$
x	xy	$x(1-y)$
$1-x$	$(1-x)y$	$(1-x)(1-y)$

$A\backslash B$	y	$1-y$
x	xy	$x-xy$
$1-x$	$y-xy$	$-x-y+xy+1$

[*1]

$\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array}$ を用いて

a, b, c, d を用いて利得表を表す
E を期待利得とする

$$E = axy + bx(1-y) + c(1-x)y + d(1-x)(1-y)$$

展開する

$$E = axy + bx - bxy + cy - cxy + d - dx - dy + dxy$$

最初に B が確率で y を選択する。
x について整理すると

$$E = x(ay - by - cy + dy + b - d) + cy - dy + d$$

$$\begin{cases} m = ay - by - cy + dy + b - d \\ n = cy - dy + d \end{cases} \quad \text{とすると}$$

期待値 E は $E = mx + n$ としてあらわすことができる。
$m = 0$ とすると

$$ay - by - cy + dy + b - d = 0$$

$$y(a - b - c + d) = d - b$$

$$y = \frac{d-b}{a+d-b-c} \tag{1}$$

これは B の確率による最適選択 $(y, 1-y)$ である。
B の期待値 E は

[*1] 確率を用いるので p,q と表すことが多い

$$E = mx + n = 0 + n$$

$$= cy - dy + d = (c - d)\frac{d - b}{a + d - b - c} + d$$

$$= \frac{ad - bc}{a + d - b - c} \tag{2}$$

次に A の確率による選択を考える。

y について同様に整理すると、

$$E = y(ax - bx - cx + dx + c - d) + bx - dx + d$$

$$\begin{cases} m = ax - bx - cx + dx + c - d \\ n = bx - dx + d \end{cases} \text{とすると}$$

期待値 E は $E = mx + n$ としてあらわすことができる。

$$E = my + n$$

$m = 0$ とすると

$$ax - bx - cx + dx + c - d = 0$$

$$x(a - b - c + d) = d - c$$

$$x = \frac{d - c}{a + d - b - c} \tag{3}$$

となる。

これが A の混合選択での最良選択 $(x, 1 - x)$ となる。

A の期待値 E は

$$E = my + n = 0 + n$$

$$= bx - dx + d = (b - d)\frac{d - c}{a + d - b - c} + d$$

$$= \frac{ad - bc}{a + d - b - c}$$

となり当然 B と同じとなる。

2.2　マトリクスを用いる方法

簡便なマトリクス的思考を用いる方法
利得行列は

$$\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}$$

展開した確率表

	y	$1-y$
x	xy	$x-xy$
$1-x$	$y-xy$	$1-x-y+xy$

xy, x, y の現れる箇所を ABCD と ± で示し、$ABCD$ と xy を組み合わせる。
xy の出現箇所と符号を整理すると

$$xy(A-B-C+D)$$

同じく x と y に着いても整理する

$$x(B-D)$$

$$y(C-D)$$

変数は x と y であるので、x, y をそれぞれ偏微分し拡大係数行列で表す。次の箇所へ xy, x, y を ABCD で計算した数値を当てはめ、マトリクスにする

	x	y	定数項
x	0	xy	x
y	xy	0	y

クラメール法で解く

■Example　（平下の例題）

$A\backslash B$		左折 (y)	右折 ($1-y$)
攻撃	x	21	−3
静観	$1-x$	−9	12

$xy(A-B-C+D)$	45
$x(B-D)$	−15
$y(C-D)$	−21
d	12

$$45xy - 15x - 21y + 12 = 0$$

と置き、偏微分して連立方程式にする

$$\begin{cases} & 45y & = 15 \\ 45x & & = 21 \end{cases}$$

拡大係数行列にする

$$\begin{matrix} 0 & 45 & 15 \\ 45 & 0 & 21 \end{matrix}$$

[*2]

クラメール法で解く

```
   1 x: (%.}:"1)  0 45 15,: 45 0 21
1 0 7r15
0 1  1r3
```

A の戦略 $(x, 1-x)$ は $(\frac{7}{15}, \frac{8}{15})$

B の戦略 $(y, 1-y)$ は $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

2.3 2 × 2 の混合戦略のスクリプト

2.3.1 シングルの利得表

シングルの利得表は共通テーブルである。

最終の式を整理してみる。

利得表	項目	式	式番号
a, b, c, d	A の戦略	$x = \dfrac{d-c}{a+d-b-c}$	(3)
	B の戦略	$y = \dfrac{d-b}{a+d-b-c}$	(1)
	期待値	$\dfrac{ad-bc}{a+d-b-c}$	(2)

2.3.2 スクリプト 1 ダイレクトに計算する

```
calc_mix2s=: 3 : 0
'A0 B0 C0 D0'=: y NB. A plane
BUNBO=: (A0+D0)-(B0+C0)
A=:(D0-C0)%BUNBO
```

[*2] 拡大係数行列

$$\begin{cases} & 45y & -15 & = 0 \\ 45x & & -21 & = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} & 45y & = 15 \\ 45x & & = 21 \end{cases} \leftrightarrow \begin{matrix} 0 & 45 & 15 \\ 45 & 0 & 21 \end{matrix}$$

```
B=:(D0-B0)%BUNBO
E=:((A0*D0)-(B0*C0))%BUNBO
1 x: L:0  A;B;E
)
```

```
   calc_mix2s 21 _3 _9 12
+----+---+-+
|7r15|1r3|5|
+----+---+-+
```

A は x（攻撃）を $\frac{7}{15}$ の確率で選ぶ
B は y（左折）を $\frac{1}{3}$ の確率で選ぶ
双方の期待値 (E) は 5

2.3.3 スクリプト 2　マトリクスを用いる方法

拡大係数行列に展開してクラメール法で解を求める。

	x	y	定数項
x	0	xy	x
y	xy	0	y

```
calc_mix2_mats=: 3 : 0
'A0 B0 C0 D0'=: y NB. A plane
MAT0=: (A0,B0),: C0,D0
mix2_mat_sub MAT0
)

mix2_mat_sub=: 3 : 0
MAT0=: y
XY=: -/ . + MAT0  NB. inner products of -/  . +
MAT=: (0,XY, - -/ {:"1 MAT0),: XY,0,- -/ {: MAT0
E=: calc_E MAT0
MAT0;MAT;1 x: L:0  (cr MAT); E
)

 cr=: %. }:"1 NB. cramer method
 calc_E=:(-/ . * ) %  -/ . + NB. fork
NB. -/ . *  determinant***** -/ . + naiseki of +
```

- 利得行列をマトリクスに表す

```
MAT0=: (A0,B0),: C0,D0
21 _3
_9 12
```

- XY を作成する
  内積演算 (dot product) の行列式の右を + とする。(A+D)-(C+B) となる

```
XY=: -/ . + MAT0  NB. xy is -/ . + MAT0
```

内積演算 (dot product) **の行列式の右を** + **とする**

- 拡大係数行列を作成する。

$$\begin{array}{ccc} 0x & 45y & = 15 \\ 45x & +0y & = 21 \end{array}$$

- クラメール法で連立方程式を解く。cr=:%. }:"1 はフック

```
   mix2s_mat 21 _3 _9 12
+-----+--------+--------+-+
|21 _3| 0 45 15|1 0 7r15|5|  NB. A
|_9 12|45  0 21|0 1  1r3| |  NB. B
+-----+--------+--------+-+
```

- 期待値を求める。最初の展開式に x, y の値と利得行列 a, b, c, d の値をいれ (素直に) 計算する

$$E = axy + bx - bxy + cy - cxy + d - dx - dy + dxy$$

$$\begin{array}{cc} & xy(A - B - C + D) \\ + & x(B - D) \\ + & y(C - D) \\ + & d \end{array}$$

```
calc_E_mat_sub=: 4 : 0
NB. calc E=xy(a+d-c-d)+x(b-d)+y(c-d)+d
NB. y for take value of d
MAT=. x
'XY X0 Y0'=:  1 2 5 { ; MAT NB. (a+d-c-b),(b-d),c-d
'AX AY' =: 1 x: {:"1 cr MAT NB. x y
+/(*/ AX,AY,XY),(*/AX,-X0),(*/ AY,-Y0),;{:y NB. calc E
NB. -X0 -Y0 reverse + -
```

```
)

   MAT calc_E_mat_sub 21 _3 _9 12
5
```

2.4 2 × 2 ダブルの利得表

利得行列が 2 枚あるので A,B の利得行列をそれぞれ計算する。

利得表	項目	式	式番号
a_0, b_0, c_0, d_0	A の戦略	$x = \dfrac{d-c}{a+d-b-c}$	(3)
	B の戦略	$y = \dfrac{d-b}{a+d-b-c}$	(1)
	期待値	$\dfrac{ad-bc}{a+d-b-c}$	(2)
a_1, b_1, c_1, d_1	A の戦略	$x = \dfrac{d-c}{a+d-b-c}$	(3)
	B の戦略	$y = \dfrac{d-b}{a+d-b-c}$	(1)
	期待値	$\dfrac{ad-bc}{a+d-b-c}$	(2)

この場合、ナッシュ均衡はプレイヤー A,B が互いに相手の戦略に対する最適反応を出し合っている状態であり、「たすきがけ」に最適解が現れる。

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dr] & x^* \in F_A(x) \\ y \arrow[ur] & y^* \in F_B(y) \end{tikzcd}$$

■Example .

$A\backslash B$	B 1		B 2	
$A1$	1	5	4	6
$A2$	2	3	0	2

（出典:舟木 例題 2.1)

純戦略のナッシュ均衡は (4,6),(2,3)

混合戦略のナッシュ均衡は A は $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, B は $(\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$ である。（出現箇所に注意）

```
   mix2_mat GF0
+---+--------+-------+---+
```

```
|1 4| 0 _5 _4|1 0 2r5|8r5|
|2 0|_5  0 _2|0 1 4r5|   |  NB. x* of B
+---+--------+------+---+
|5 6| 0 _2 _4|1 0 1r2|4  |  NB. y* of A
|3 2|_2  0 _1|0 1   2|   |
+---+--------+------+---+
```

■Example　.

$A\backslash B$	B	1	B	2
$A1$	1	2	2	6
$A2$	0	3	3	0

（出典:中山表 3.2)

戦略 x を出すのは A で反応するのは B。A の戦略 (x) に対する B の分岐点は $\frac{1}{2}$

B の戦略 y に対する A の反応は $\frac{3}{4}$ で分岐。

ナッシュ均衡は $(x, y) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ で最適反応に関する不動点である。

期待利得は 1.5

```
  mix2_mat GN0
+---+--------+------+---+
|1 2|0 2 1   |1 0 3r2|3r2|
|0 3|2 0 3   |0 1 1r2|   | NB. hand of A(y) this point react B
+---+--------+------+---+
|1 2| 0 _4 _2|1 0 3r4|3r2| NB. hand of B(x) this point react A
|3 0|_4  0 _3|0 1 1r2|   |
+---+--------+------+---+
```

■Example　逢い引きのジレンマ

A が女性、B が男性。A の戦略 x（オペラ）に対して B は $\frac{2}{3}$ で最適反応（妥協)。従って A はオペラ：サッカーを $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ で選択。

B の戦略 y（オペラ）に対して A は $\frac{1}{3}$ で最適反応（妥協)。従って B はオペラ：サッカーを $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ で選択。

これでは半分もデートトできない?。

期待値は $\frac{2}{3}$ でオペラにつき合うよりも悪い。

$A\backslash B$	オペラ		サッカー	
オペラ	2	1	0	0
サッカー	0	0	1	2

（出典:中山表 3.3)

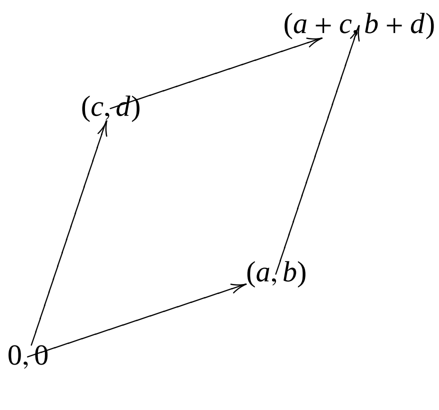
```
   mix2_mat GN1
+---+-----+-------+---+
|2 0|0 3 1|1 0 1r3|2r3|
|0 1|3 0 1|0 1 1r3|   | NB. B
+---+-----+-------+---+
|1 0|0 3 2|1 0 2r3|2r3| NB. A
|0 2|3 0 2|0 1 2r3|   |
+---+-----+-------+---+
```

2.5　2×2 の利得行列と線形代数

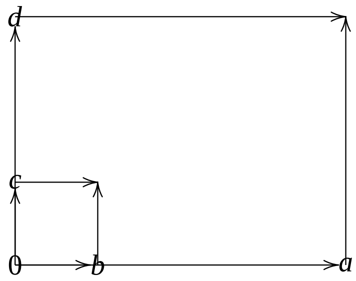
2×2 の利得行列を $\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}$ を行列式で表すと

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

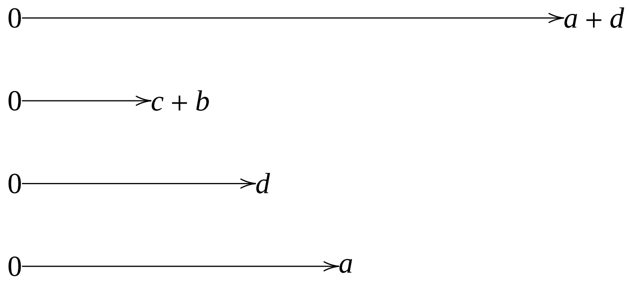
ここでベクトル $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ と $(\mathbf{c},\mathbf{d})$ とすると力の平行四辺形となる。



この平行四辺形の面積は行列式の値 $(ad-bc)$ となる。
図で示すと、外枠の $\mathbf{a}$ と $\mathbf{d}$ で造る長方形から平行四辺形になった減少分 $\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ で造る小さい長方形を引いた値となる。



それでは $(a+b)-(c+d)$ とは何を表すか。



$(a+b)-(c+d)$ で確率 1 の長さを表す。求める分子は混合戦略の A,B の値に関する $(d-c),(d-b)$ で依然保有する力であろうか。*3。期待値 E の方は $(ad-bc)$ は行列式の値で面積である。

利得表	項目	式	式番号
a,b,c,d	A の戦略	$x=\dfrac{d-c}{a+d-b-c}$	(3)
	B の戦略	$y=\dfrac{d-b}{a+d-b-c}$	(1)
	期待値	$\dfrac{ad-bc}{a+d-b-c}$	(2)

3　3×3 の混合戦略

A,B の選択肢が 3 個になった場合。

$A\backslash B$	y	v	$1-y-v$
x	xy	xv	$x(1-y-v)$
u	uy	uv	$u(1-y-v)$
$1-x-u$	$y(1-x-u)$	$v(1-x-u)$	$(1-x-u)(1-y-v)$

次のような表を作る。ここに +– を付けた箇所から得点を取得する。

A	B	C
D	E	F
G	H	I

*3 $d-c$ であって $a-c$ ではない

展開する

	y	v	$1-y-v$
x	xy	xv	$x-xy-xv$
u	uy	uv	$u-uy-uv$
$1-x-u$	$y-xy-uy$	$v-xv-uv$	$1-x-y-u-v$ $+xy+xv+yu+uv$

$xy, xv, uy, uv, x, y, u, v$ と $ABCDEFGHI$ と組み合わせる。計算は ± と利得行列 $ABC\cdots I$ のみの 8 個で足りる。

$$xy(A-C-G+I)$$

$$xv(B-C-H+I)$$

$$uy(D-F-G+I)$$

$$uv(E-F-H+I)$$

$$x(C-I)$$

$$y(G-I)$$

$$u(F-I)$$

$$v(H-I)$$

4 の変数 x, y, u, v についてそれぞれ偏微分し、連立方程式に展開して拡大係数行列のマトリクスを作成する

	x	y	u	v	定数項
x	0	xy	0	xv	x
y	xy	0	uy	0	y
u	0	uy	0	uv	u
v	xv	0	uv	0	v

クラメール法で解く

利得表の記号を ± で表すと次のようになる。

A	B	C
D	E	F
G	H	I

連立方程式の解が

	x	y	u	v	定数項

<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} + & & - \\ \hline & & \\ \hline - & & + \end{array}$</td><td>0</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} & + & - \\ \hline & & \\ \hline & - & + \end{array}$</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} & & + \\ \hline & & \\ \hline & & - \end{array}$</td></tr>
<tr><td>y</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} + & & - \\ \hline & & \\ \hline - & & + \end{array}$</td><td>0</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} & & \\ \hline + & & - \\ \hline - & & + \end{array}$</td><td>0</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} & & \\ \hline & & \\ \hline + & & - \end{array}$</td></tr>
<tr><td>u</td><td>0</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} & & \\ \hline + & & - \\ \hline - & & + \end{array}$</td><td>0</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} & & \\ \hline & + & - \\ \hline & - & + \end{array}$</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} & & \\ \hline & & + \\ \hline & & - \end{array}$</td></tr>
<tr><td>v</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} & + & - \\ \hline & & \\ \hline & - & + \end{array}$</td><td>0</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} & & \\ \hline & + & - \\ \hline & - & + \end{array}$</td><td>0</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|} & & \\ \hline & & \\ \hline & + & - \end{array}$</td></tr>
</table>

次のデータを入れてみる。

$A\backslash B$	y	v	$1-y-v$
x	0	15	−5
u	5	0	24
$1-x-u$	13	8	0

```
 3 3 $ GH1
0 15 _5
5  0 24
13  8  0
```

(出典 平下 文献参照)

$$E = \begin{array}{ccc} 0xy & +15xv & -5x(1-y-v) \\ 5uv & +0uv & +24u(1-y-v) \\ +13(1-x-u)y & +8(1-x-u)v & +0(1-x-u)(1-y-v) \end{array}$$

$$= -5x + 13y + 24u + 8v - 8xy + 12xv - 32uy - 32uv$$

連立方程式は次のとおりで、x, y, u, v を求める。
ハンドは x, y, u, v から、プレイヤー A は $x, u, 1-x-u$, Y は $y, v, 1-y-v$ が求められる。

$$\left\{\begin{array}{c|ccccccc} x & & -8y & & +12v & = & 5 \\ y & -8x & & -32u & & = & -13 \\ u & & -32y & & -32v & = & -24 \\ v & 12x & & -32u & & = & -8 \end{array}\right.$$

calc_mix3s_mat GH1

```
+--------+-----------------+------------+---------------+
| 0 15 _5| 0  _8   0  12   5|1 0 0 0   1r4|1r4 11r32  11r20|
| 5  0 24|_8   0 _32   0 _13|0 1 0 0   1r5|1r5 11r20 17r160|
|13  8  0| 0 _32   0 _32 _24|0 0 1 0 11r32|               |
|        |12   0 _32   0  _8|0 0 0 1 11r20|               |
+--------+-----------------+------------+---------------+
```

$$\begin{array}{cc} x & 1r4 \\ y & 1r5 \\ u & 11r32 \\ v & 11r20 \end{array}$$

A,B の混合戦略

$$\begin{array}{c|ccc} & x & u & 1-x-u \\ A & 1r4 & 11r32 & 11r20 \\ \hline & y & v & 1-y-v \\ B & 1r5 & 11r20 & 1r4 \end{array}$$

期待値は次を根気よく計算して合計する。

$$xy(A-C-G+I)$$

$$xv(B-C-H+I)$$

$$uy(D-F-G+I)$$

$$uv(E-F-H+I)$$

$$x(C-I)$$

$$y(G-I)$$

$$u(F-I)$$

$$v(H-I)$$

$$1$$

```
   calc_E_mix3s_mat GH1
+-+-----------------------------------------------+
|8|1 _2r5 33r20 _11r5 _121r20 _5r4 13r5 33r4 22r5|
+-+-----------------------------------------------+
```

期待値 $E = 8$

4　ロジット均衡とゲーム理論

世は怜悧な経済人ばかりが生息しているわけではなくもっとまともな人の方が多い。以降は川越を元にプログラムしたものである。

4.1　ロジット均衡

期待値の比

$$p = \frac{u_1}{u_1 + u_2}$$

分子と分母にそれぞれ λ をかける

$$p = \frac{u_1}{u_1 + u_2} = \frac{\lambda}{\lambda}\frac{u_1}{u_1 + u_2} = \frac{\lambda u_1}{\lambda u_1 + \lambda u_2}$$

確率でマイナスの値が出ないように指数関数を用いる。(多項ロジット)

$$p = \frac{exp(\lambda u_1)}{exp(\lambda u_1) + exp(\lambda u_2)}$$

利得行列に適用する。

$$p = \frac{exp(\lambda a_0 q)}{exp(\lambda a_0 q) + exp(\lambda a_1 (1 - q))}$$

$$q = \frac{exp(\lambda a_1 p)}{exp(\lambda a_1 p) + exp(\lambda a_0 (1 - p))}$$

4.2　Example とアルゴリズム

■Example　逢い引きのジレンマ

例題はロックとジャズとなっていたが（私にとっては）どちらも選べるのでジレンマにならない。湯川礼子女史によるとプレスリーが茶の間に黒人音楽を持ち込み、マイケル・ジャクソンが人々を引き込み、*Yes We can* までに *3* 段階の歩みが見られるとのことである。
幸いスコアは前出の逢い引きのジレンマと同じであるので戻してみた。

A が女性、B が男性。

$A\backslash B$	オペ	ラ	サッ	カー
オペラ	2	1	0	0
サッカー	0	0	1	2

（出典:川越表 *5.1)*

```
   mix2_mat GK0
+---+-----+-------+---+
|2 0|0 3 1|1 0 1r3|2r3|
|0 1|3 0 1|0 1 1r3|   | NB. B
+---+-----+-------+---+
|1 0|0 3 2|1 0 2r3|2r3| NB. A (hand of A -> react B)
|0 2|3 0 2|0 1 2r3|   |
+---+-----+-------+---+
```

A 子さんは $\dfrac{2}{3}$ までオペラの主張を通した。B 君は $\dfrac{1}{3}$ で横を向かれた。
ナッシュ均衡は
$A = (\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3})$ でオペラで, $B = (\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3})$ でサッカー, 期待値 $E = \dfrac{2}{3}$ である。

式に数値を入れて見る。利得表は (a_0, a_1) の値以外は用いない。λ は *0* から ∞ までであるが *100* 程度でうち切る。

確率は次のように与える *(*多いとグラフが滑らかになる）

```
   (i.11)%10
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1
```

グラフの作成に関しては注意が必要である。X 軸には y 即ち B のハンドで Y 軸はこれに対する A の反応の値を表す。（*blue* で急激に立ち上がる方*)*
一方 B の *plot* は、B の計算したスコアを X 軸において Y 軸にはインデックスに用いた確率 *(0.0.1 .... 0.9 1)* の値を置く。（赤=徐々に横に寝ていく方）。*2* の曲線は λ が大きくなると混合戦略のナッシュ均衡に収束する。

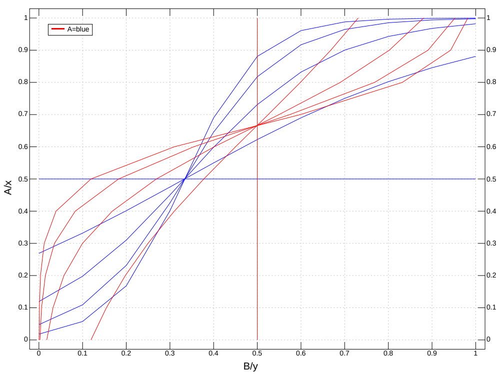


図 1　$\lambda = 0 - 5$

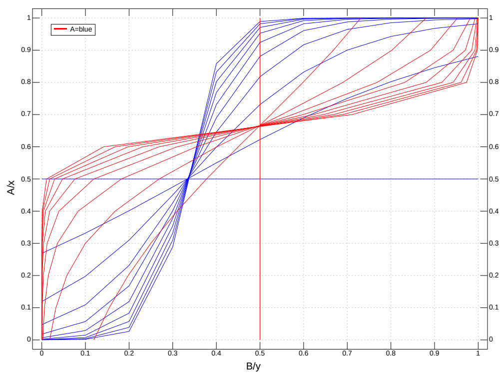


図 2　$\lambda = 0 - 10$

グラフの十文字は $\lambda = 0$ の場合で *(0.5,0.5)* である。それではこの λ はどのように解したら良いであろうか。λ が小さい内は分布の幅が大きいが、大きくなるとナッシュ均衡に収斂してくる。λ

$\lambda = 2$ の場合次のようになる

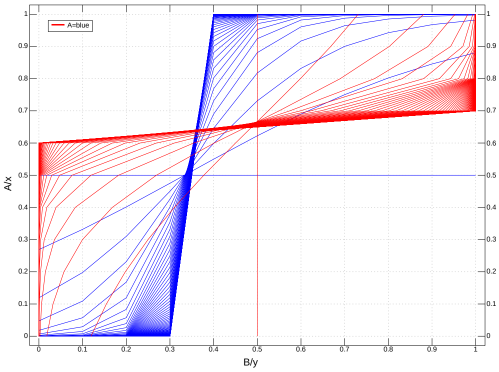


図 3　$\lambda = 0 - 100$

```
   2 game_logit_sub 2 1
  x/y y(for A) x(for B)
  0 0.119203 0.0179862
0.1 0.197816 0.0322955
0.2 0.310026 0.0573242
0.3 0.450166 0.0997505
0.4 0.598688  0.167982
0.5 0.731059  0.268941
0.6 0.832018  0.401312
0.7  0.90025  0.549834
0.8 0.942676  0.689974
0.9 0.967705  0.802184
  1 0.982014  0.880797
```

は**怜悧指数**すなわちこの値が大きくなるとナッシュ均衡を指向して、「裏切り、さぼり、安売りに邁進する」経済人であろうか。いろいろ試していただきたい。

4.3 Script

```
game_logit =: 4 : 0
NB. Logit_game
NB. Usage: x(max of Lambda) y 2 value of a0 a1
LAMDAX=: i.  LAMDA=: x  NB. max of lamda
'A0 A1'=. y
ANS=. <''
for_ctr. i. LAMDA do.
TMP=. (ctr{ LAMDAX) game_logit_sub A0,A1
ANS=. ANS,<TMP
end.
}. ANS
)

game_logit_sub=: 4 : 0
LAMDA=. x
'AX AY'=. y
```

```
PQ=: 10 %~i.11 NB. p/q ~~~ 0 0.1...0.9 1
TMP0=. ^ LAMDA * AX * PQ   NB. list
TMP1=. ^ LAMDA * AY * -. PQ
PX=. TMP0 % TMP0 + TMP1
NB. -----------------
TMP2=. ^ LAMDA * AY * PQ
TMP3=. ^  LAMDA * AX * -. PQ
QX=. TMP2 % TMP2 + TMP3
PQ,.PX,.QX
)
```

5　サマリー

5.1　スクリプトのサマリー

<table>
<tr><td>利得行列の入力</td><td>a, b, c, d の順に<code>;(Link)</code> で区切って
box にする
GK0=: 2 1;0 0;0 0;1 2
シングルの場合はリストでよい
GS0=: 21 _3 _9 12</td><td><pre>   GK0
+---+---+---+---+
|2 1|0 0|0 0|1 2|
+---+---+---+---+</pre></td></tr>
<tr><td>利得行列の整列</td><td>gmatrix</td><td><pre>   gmatrix GK0
+---+---+
|2 1|0 0|
+---+---+
|0 0|1 2|
+---+---+</pre></td></tr>
<tr><td>2×2 single
2×2 double</td><td>mix2s_mat
mix2_mat</td><td></td></tr>
<tr><td>3×3 single</td><td>mix3s_mat</td><td></td></tr>
<tr><td>期待値</td><td>mix2s_E_mat
mix3s_E_mat</td><td></td></tr>
</table>

5.2　J Grammar

dot product　*APL* や *J* は内積、外積を全ての関数に拡張している。内積系 *(dot products)* のプリミティブには次の *3* がある。

`-/ . *`	行列式の値	サラスの方法
`+/ . *`	*power*	単項
`+/ . *`	内積	両項

単項の *dot products* で $\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}$ を次のように計算できる

`-/ . *`	$ad - bc$	行列式の値
`+/ . *`	$ad + bc$	*power*
`-/ . +`	$(a + d) - (b + c)$	拡張
`+/ . +`	$(a + d) + (b + c)$	拡張

行と列の取りと落とし　　*from*`({}`による取り

```
   i.3 3
0 1 2
3 4 5
6 7 8
```

`0 2` **行の** `1 2` **列を取る**

```
   (<0 2;1 2){i. 3 3
1 2
7 8
```

特定の行や列を指定して落とすプリミティブはないので次により指標を作成し　`{,#`を用いて取り、やコピーを行う。

```
  -. (i. 3) e. 1
1 0 1
I.  -. (i. 3) e. 1
0 2
```

クラメール法　　拡大係数行列を用いた連立方程式の解法

拡大係数行列

$$\begin{bmatrix} a & b & m \\ c & d & n \end{bmatrix}$$

拡大係数行列に係数行列の逆行列を左から掛けて連立方程式の解を求める。

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a & b & m \\ c & d & n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi \\ 0 & 1 & \eta \end{bmatrix}$$

クラメール法 `%.}:"1` *NB. Hook*

明示型では

`cr=:3 : 'y %.}:"1 y'`

- 最終列を落とし係数行列にする。 `}:"1` ランク *1* を指定して列に作用させる。
- 単項の *Hook* の作用（最初に *y* の単項に作用し、次に *y u y* と作用する）

```
       %.
   ↗        ↖
   |         |
   y        }:"1
             |
             y
```

$\begin{cases} a+5b+16c+9 &= 0 \\ 13a+8c+10 &= 0 \\ 19a+4b+12c+14 &= 0 \end{cases}$	`cr=: %.}:"1` *NB.Hook*
	フックを用いて簡潔に作成した。
		`a=.3 4 $ 20 ? 20`
		` 1 5 16  9`
		`13 0  8 10`
		`19 4 12 14`

左に単位行列が出れば上手く解けている。（微細な塵が出ることが多い）
`   cr a`
`1 0 0  0.4`
`0 1 0 _0.2`
`0 0 1  0.6`
	両項
	`   a %. }:"1 a`
	`1 0 0  0.4`
	`0 1 0 _0.2`
	`0 0 1  0.6`
		両項の `%.` は *matrix-divide*
		敢えて両項で使わないようにすれば次の通り
		`(%.}:"1 a) +/ . * a`
		`1 0 0  0.4`
		`0 1 0 _0.2`
		`0 0 1  0.6`

[*4]

6　References

舟木由喜彦「演習ゲーム理論」新世社/サイエンス社　*2004*

平下幸男「数理科学のレッスン」産業図書　*1992*

川越敏司「行動ゲーム理論入門」*NTT* 出版 *2010*

佐々木宏夫「入門ゲーム理論 · 戦略的思考の科学」日本評論社 *2003*

付録 A　J の入手

`http://www.jsoftware.com` から *DL*

WIN32/64 , Linux32/64 , IntelMac,pocketPC

付録 B　Script の DL

`http://homepage3.nifty.com/asagaya_avenue`

APL Association workshop　の *2010* 年 *4* 月より

[*4] 塵は quire 'numeric' にある clean で取れる