超幾何関数の周辺－その２
Notes on the Hypergeometric Functios No.2

(株) 竹内ハガネ商行　　竹内寿一郎

１．はじめに

前回はガンマ関数、2 項係数などを中心に述べたが、超幾何分布そのもの、あるいは超幾何確率は 2 項係数との繋がりはあっても、超幾何関数・超幾何級数と直接的な関係は無く、確率母関数 $E(s^x)$ ではじめて繋がりがあることを述べてきた【1】。それも分子のパラメタが負の整数の場合に限定され、

$$(1)\qquad E(s^x)=\frac{(n-m)_{(r)}}{n_{(r)}}\sum_{k=0}^{r}\frac{s^k}{k!}\frac{m_{(k)}r_{(k)}}{(n-m-r+1)^{(k)}}$$
$$=\frac{(n-m)_{(r)}}{n_{(r)}}{}_2F_1(-m,-r;n-m-r+1;s)$$

のように、いわゆる超幾何級数で表わされることが超幾何分布の所以なのであった。尤も 2 項係数が超幾何級数と多少関連があると言えなくもないが…。

この「その 2」では超幾何関数がいろいろな解析関数の表現にどのように使われているかを中心に述べることにする。普段見慣れない複雑な関数もこの超幾何関数で表されることを見てみよう。

２．超幾何関数とガウスの超幾何関数

通常、超幾何関数と呼ばれるものは以下のような関数をいう【5】、【6】。

$$(2)\qquad 1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{x}{1!}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\frac{x^3}{3!}+\cdots$$
$$={}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$$

これをガウスの超幾何関数といい、

$$(3)\qquad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(\gamma-(\alpha(\beta+1)x)\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0$$

なる多項式係数の 2 階常微分方程式の解である。正確にいうと、(2) 式の級数を超幾何級数といい、下の式の ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ が超幾何関数と名付けられ、F の左の小さい数字は級数の分子の項のパラメタ数、F の右の小さい数字は分母の項のパラメタ数を表わし、分子が 2 個、分母が 1 個のパラメタ数、そして x の級数であることを表わしている。また ${}_1F_1(\alpha;\gamma;x)$ で表される超幾何関数は合流型超幾何関数 (Confluent Hypergeometric Function) と呼ばれ、初等関数の表現によく現れる。

一般に、フックス型 (Fuchs 型) 微分方程式とは「有理関数を係数とする線形微分方程式で特異点が全て確定特異点であるものをいう」【5】で、超幾何微分方程式はこのフックス型の微分方程式の範疇に含まれ、その解は (2) を拡張した、

$$(4)\qquad {}_mF_n(a_1,a_2,\cdots,a_m;b_1,b_2,\cdots,b_n;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_1^{(k)}a_2^{(k)}\cdots a_m^{(k)}}{b_1^{(k)}b_2^{(k)}\cdots b_n^{(k)}}\frac{x^k}{k!}$$

と表現でき、全て上昇階乗で表わした級数が一般超幾何関数である。$m=2$、$n=1$ の場合がガウスの超幾何関数または単に超幾何関数といわれ、はじめオイラーによって報告されたが、後にガウスがこれについて詳細な性質等を研究したことによって彼の名がつけられている。また、超幾何関数を表わす F はフックスの名にちなんで彼の頭文字が使用されている。

なお、(2) 式で分子のパラメタが負の整数の場合、階乗は下降階乗になり、超幾何級数は有限個で終わり、(2) は有限個で表わされる。

超幾何関数の収束条件はいろいろ研究されていて、$m < n+1$ であれば絶対収束し、$m > n+1$ であれば発散する。$m = n + 1$ のときは、$|x| < 1$ であれば絶対収束し、$|x| > 1$ のときは発散するが、$|x| = 1$ のときが悩ましく、係数 a、b の正負や実数部の大きさによって状況が変わってくる。また、$m = n + 1 (m \geq 3)$ についての研究も最近では非常に多く行われている。

ところで、2 階常微分方程式の確定特異点の数による解の分類が研究されていて、特異点が 1 個の場合は 1 次関数、2 個の場合は多項式、対数関数、指数関数、三角関数などの多くの初等関数が解となり、3 個の場合がまさに (3) の方程式に帰着され、(2) の解を得る。

３．初等関数の超幾何関数による表現

さて、数々の初等関数を超幾何関数で表わしてみよう。【2】、【8】

●展開式

(5) $$(1-x)^r = \sum_{k=0}^{\infty}(-r)((-r)+1)\cdots((-r)+k-1))\frac{(-x)^k}{k!} = {}_1F_0(-r;;-x)$$

$r > 0$ のとき、和は有限個になる。これがすなわち 2 項展開である。

(6) $$(1-x)^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty} r(r+1)\cdots(r+k-1)\frac{x^k}{k!} = {}_1F_0(r;;x)$$

$r > 0$ のとき、無限級数になる。 これが負の 2 項分布の名付けの基になっていて, 負の 2 項展開とよばれる。ちなみに負の 2 項分布の積率母関数は、

(7) $$E(e^{\theta k}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\theta k}\begin{pmatrix} r+k-1 \\ k \end{pmatrix} p^r(1-p)^k = p^r\{1-(1-p)e^{\theta}\}^{-r}$$

となり、母関数に負の 2 項の形が出現する。(7) の誘導を是非試みて欲しい。文献の講義ノート【7】を参照すればこの証明方法が分かるであろう。

●指数関数

(8) $$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k = {}_0F_0(;;x)$$

対数関数

(9) $$\ln(1+x) = x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}x^k = x\cdot{}_2F_1(1,1;2;-x)$$

(10) $$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}x^{2k} = 2x\cdot{}_2F_1\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};x^2\right)$$

●三角関数

(11) $$sinx = x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k} = x\cdot{}_0F_1\left(;\frac{3}{2};-\frac{x^2}{4}\right)$$

(12) $$cosx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} = x\cdot{}_0F_1\left(;\frac{1}{2};-\frac{x^2}{4}\right)$$

(13) $$sin^{-1}x = x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)}x^{2k} = x\cdot{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};x^2\right)$$

ここで、$(2k+1)!! = (2k+1)(2k+1-2)(2k+1-4)\cdots5\cdot3\cdot1$

$(2k)!! = (2k)(2k-2)(2k-4)\cdots4\cdot2\cdot1$ とする。

$$(14)\quad tan^{-1}x = x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}x^{2k} = x\cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-x^2\right)$$

４．解析関数の超幾何関数による表現

●第１種、第２種完全楕円積分 $(K(r)$、$E(r))$ 【9】

$$(15)\quad K(r) = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-r^2sin^2\theta}}d\theta = \frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)r^{2k} = \frac{\pi}{2}\cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;r^2\right)$$

$$(16)\quad E(r) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-r^2sin^2\theta}d\theta = \frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)\frac{r^{2k}}{1-2k} = \frac{\pi}{2}\cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2};1;r^2\right)$$

●誤差関数【10】

$$(17)\quad erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

この関数の相補誤差関数 $erfc(x)$ は、

$$(18)\quad erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-t^2}dt = 1 - erf(x)$$

で表す。(17) をテーラー展開して項別積分すると、

$$(19)\quad erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \cdots\right)$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^{2k}}{(2k+1)k!} = \frac{2x}{\sqrt{\pi}}{}_1F_1\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-x^2\right)$$

これをクンマー変換して別表現の超幾何関数を使って表すと、

$$(20)\quad erf(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\cdot {}_1F_1\left(1;\frac{3}{2};x^2\right)$$

ところで標準正規分布との関係は、

$$(21)\quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt = \frac{1}{2}\left\{1 + erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right\} = \frac{1}{2}erfc\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

従って、良く検定などに使われる上側確率は、

$$(22)\quad Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} e^{-t^2/2}dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

誤差関数を標準正規分布で表すと、

$$(23)\quad erf(x) = 2\Phi(x\sqrt{2}) - 1$$

$$(24)\quad erfc(x) = 2[1 - \Phi(x\sqrt{2})]$$

誤差関数および正規分布に対する J の関数を超幾何関数 H. を使って定義してみる【4】。

```
erf1=: 1 H. 1.5@*: * 2p_0.5&* % ^@:*:          NB. error function (20) 式
erf2=:0.5 H. 1.5@-@*: * +:@*&1p_0.5            NB. error function (19) 式
n01cdf=: -: @: >: @: erf1 @: ((%:0.5)&*)       NB. CDF of normal 0,1 (21) 式
```

●正弦積分、余弦積分、指数積分など【11】

余弦と指数は複素関数として多価になるので複素数にまつわる問題を避け、対数の表現を使って表わしたりするため、x の代わりに z で表わすのが自然なのでここからは級数に z を使用することにする。尤もこれまでここに掲げた公式は x が複素数でも成立するのではあるが。

(24) $$Si(z) = \int_0^z \frac{sint}{t}dt = z\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!}z^{2k} = z \cdot {}_1F_2\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2},\frac{3}{2};-\frac{z^2}{4}\right)$$

(25) $$Ci(z) = \gamma + \ln z - \int_0^z \frac{1-cost}{t}dt = \gamma + \ln z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)(2k)!}z^{2k}$$
$$= \gamma + \ln z - \frac{z^2}{4} \cdot {}_2F_3\left(1,1;2,2,\frac{3}{2};-\frac{z^2}{4}\right)$$

ここで、γ はオイラーの定数である。

(26) $$Ei(z) = \gamma + \ln z - \int_0^{-z} \frac{1-e^{-t}}{t}dt = \gamma + \ln z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kk!}z^k$$
$$= \gamma + \ln z + z \cdot {}_2F_2\left(1,1;2,2;z\right)$$

5．超幾何関数のオイラー表示

ガウスの超幾何関数をオイラーの積分として表すことができる。【8】

(27) $${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-tz)^{-b}dt \quad (0 < R(a) < R(c), |z| < 1)$$

これは以下のように証明される。

(証明)

(28) $${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{(k)}b^{(k)}}{c^{(k)}k!}z^k$$
$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(c-a)b^{(k)}}{\Gamma(c+k)k!}z^k$$
$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\sum_{k=0}^{\infty}B(a+k,c-a)\frac{b^{(k)}}{k!}z^k$$
$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^1 t^{a+k-1}(1-t)^{c-a-1}dt\right)\frac{b^{(k)}}{k!}z^k$$
$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^{(k)}}{k!}(tz)^k\right)dt$$
$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-tz)^{-b}dt \quad \text{(証明終わり)}$$

オイラーの積分表示の式 (27) において $z=1$ とおくと、ガウスの超幾何定理を得る。

(29) $${}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-b-1}dt$$
$$= \frac{\Gamma(c)B(a,c-a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

また、ここで $a=-k$ とするとファンデルモンドの恒等式を得る。

(30) $${}_2F_1(-k,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b+k)}{\Gamma(c+k)\Gamma(c-b)} = \frac{(c-b)^{(k)}}{c^{(k)}}$$

6．J による誤差関数と正規分布の比較

```
NB. ==============================================
NB. Normal Distribution : High Precision 文献【3】
NB. Ndist(u)=NP(u>0)=Phi(u)=1-NQ(u>0)
```

```
NB. ==============================================
   stnormal=:(%:@o.@2:)(%~)^@-@-:@*:
NB. When u>0 is small
   NP=:3 : 0
(stnormal y)*y%(-‘%‘+‘%)/,(>:+:k),.(*:y)*>:k=.i.28
)
NB. When u>0 is large
   NQ=:3 : 0
(stnormal y)*%‘+/1,,y ,.>:i.28
)
NB. Standard Normal Distribution Function Phi(u)
   Ndist=:3 : 0
if. 3.3<z=:|y do. q=:NQ z else. q=:0.5-NP z end.
if. 0<:y do. q=:1-q end.
)
NB. ===========================================
NB. Error Function by Using Hypergeometric fn.
NB. erf1 erf2 and n01cdf=Ndist
NB. ===========================================
   erf1=: 1 H. 1.5@*: * 2p_0.5&* % ^@:*:        NB. error function (20)式
   erf2=:0.5 H. 1.5@-@*: * +:@*&1p_0.5          NB. error function (19)式
   n01cdf=: -: @: >: @: erf1 @: ((%:0.5)&*)     NB. CDF of normal 0,1 (21)式

   precision
9!:11
   precision 12
   erf1 1
0.84270079295
   erf2 1
0.84270079295
   n01cdf 1
0.841344746069
   Ndist 1
0.841344746069
   n01cdf 2
0.977249868052
   Ndist 2
0.977249868052
   precision 16
   n01cdf 2
```

```
0.9772498680518207
   Ndist 2
0.9772498680518211
```

【参考文献】

【1】竹内寿一郎（2010）：　超幾何関数の周辺ーその１　JAPLA 研究会 2010.4.24 資料

【2】Abramowitz, M., and Stegun, I.A.(1964)　：　*Handbook of Mathematical Functions*、National Bureau of Standards Applied Mathematics Series #55, U. S. Government Printing Office

【3】山内二郎編（1997）：　統計数値表 JIS 1972　日本規格協会、付録のサブルーチンプログラム

【4】J Help Vocabulary　：　J 言語の Vocabulary リストの中の H. Hypergeometric

【5】佐藤郁郎 (2003)　：　超幾何関数とフックスの問題、　今月のコラム (閑話休題) 2003 のバックナンバー 21.
`http://www.geocities.jp/ikuro_kotaro/koramu/tyoukika.htm`

【6】佐藤郁郎 (2004)　：　超幾何関数のはなし、　今月のコラム (閑話休題)　2004 のバックナンバー 46.
`http://www.geocities.jp/ikuro_kotaro/koramu/249_hgf.htm`

【7】竹内寿一郎 (2005)　：　確率ノート・負の 2 項分布、慶應義塾大学理工学部　学部 2 年生「確率」講義ノート　p.17
`http://www.ae.keio.ac.jp/lab/soc/takeuchi/lectures/kakuritsu.pdf`

【8】超幾何級数　：　フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia)』、
`http://ja.wikipedia.org/wiki/%E8%B6%85%E5%B9%BE%E4%BD%95%E7%B4%9A%E6%95%B0`

【9】楕円積分　：　フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia)』、
`http://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%A5%95%E5%86%86%E7%A9%8D%E5%88%86`

【10】誤差関数　：　フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia)』、
`http://ja.wikipedia.org/wiki/%E8%AA%A4%E5%B7%AE%E9%96%A2%E6%95%B0`

【11】指数積分　：　フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia)』、
`http://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%8C%87%E6%95%B0%E7%A9%8D%E5%88%86`