財務計算あれこれ
第２回　期間と利率の計算式
No. 2. Formulas for Among Term, Intrests, and Other Factors

(株) 竹内ハガネ商行　　竹内寿一郎

１．はじめに

前回[4] 現価 P(現在価値)、終価 S(将来価格)、年価 M(ローン返済額・均等積立額、または均等収益額)、利率 i、期間 n の 5 つの関係式を明らかにし、それらの計算が明示的 (explicit) に計算出来るように (陽関数で表わされるように) 示した。その結果、利率 ($intrest$) と期間 ($term$ または $duration$) は全ての計算で説明変数 (式の右側にくる) として扱い、現価 (present values)、終価 (future values)、年価 (payments) のうちのひとつを目的変数に、残りの 2 つの変数を説明変数として扱い、本質的に明示的な 6 個の陽関数 (SP,PS,MS,SM,MP,PM) を示したのであるが、年価が関係する式では、(1) 無・無 (0 期、満期にお金の出入り無し)、(2) 期末 (0 期に無、満期時にお金の出入り有り)、(3) 期首 (0 期にお金の出入り有り、満期時にお金の出入り無)、(4) 有・有 (0 期、満期にお金の出入り有り)、の 4 つの場合を示し、こうすることにより、より一般的なお金の出入りに対してこれらの変数間の関係式を示すことができた。

今回は利率、期間を求める陽の式を考えた。その結果、期間に関しては明示的に示すことが出来たが、利率 i に関しては年価が入るとどんな場合でも陽関数を得ることが出来なかった。その例を繰り返し計算により利率 (これまでは内部利率、IRR と呼んでいた[1]) を求め、例題として掲げておいた。

例題に於ける各関数名は、すべて大文字で、先頭の 1 文字が目的変数、その他の 3 文字 (先頭 1 文字、後は利率、期間、現価、終価、年価の中から 3 つ) については、利率 (I)、期間 (N)、現価 (P)、終価 (S)、年価 (M) の順に先頭を除いて並べ、4 文字で関数名とした。また、年価の入った利率を計算するための陰関数としては右に利子 i だけの１つの引数をとり他は左引数にして、新たに 2 項関数 `MP_1` および `MS_1` を定義した。

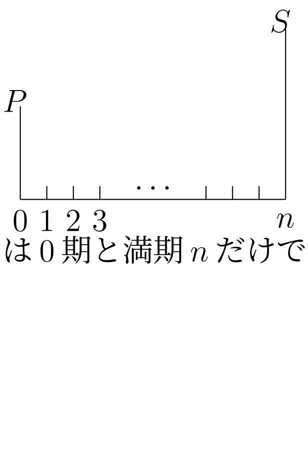
また、5 節「J の関数と例題」の先頭に J の初心者のために J のファイナンス関数 `intrest.ijs`[2] の始めに出てくる重要な 5 つの関数について解説を加えておいた。

２．利率、期間、そして現価と終価

ここでは期間 (n)、利率 (i) ともに陽の関数として表わすことができた。

(1) $$n = \frac{\ln\frac{S}{P}}{\ln(1+i)}$$

(2) $$i = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$



現価と終価の関係はお金の出入りは 0 期と満期 n だけである。

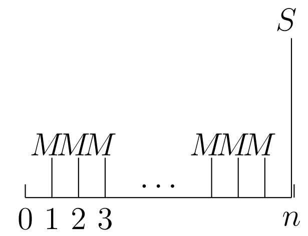
３．利率、期間、年価と終価

毎年、あるいは毎月同じ金額 M を積み立てて行き、目標額 S に到達させるにはその利率や期間をいくらにしたら良いかという問題を解く。目標額は終価であり、将来価格である。

(1) 初期支払無、満期支払無

$$(3)\qquad n=\frac{\ln\left\{(1+i)+\frac{S}{M}i\right\}}{\ln(1+i)}$$

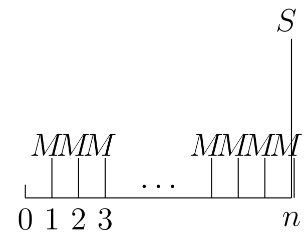
i は陽関数として表現できない。



(2) 初期支払無、満期支払有 (期末)

$$(4)\qquad n=\frac{\ln\left\{1+\frac{S}{M}i\right\}}{\ln(1+i)}$$

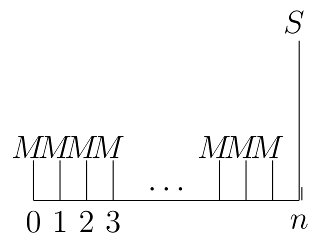
i は陽関数として表現できない。



(3) 初期支払有、満期支払無 (期首)

$$(5)\qquad n=\frac{\ln\left\{(1+i)+\frac{S}{M}i\right\}}{\ln(1+i)}-1$$

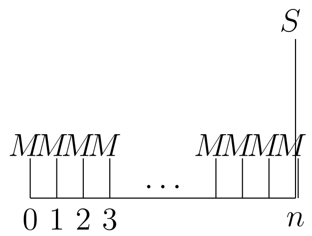
i は陽関数として表現できない。



(4) 初期支払有、満期支払有

$$(6)\qquad n=\frac{\ln\left\{1+\frac{S}{M}i\right\}}{\ln(1+i)}-1$$

i は陽関数として表現できない。



以上 (3)〜(6) を $\boldsymbol{b}'=(b1,b2)$ としてまとめると、

$$(7)\qquad n=\frac{\ln\left\{(1+b2*i)+\frac{S}{M}i\right\}}{\ln(1+i)}-b1*1$$

ここで、$\boldsymbol{b}$ は期末 (0,0)、期首 (1,1)、無無 (0,1)、有有 (1,0) である。

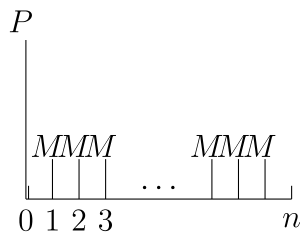
４．利率、期間、年価と現価

期首または期末にお金を借り、毎年または毎月一定の額 M を返済してゆくときの借入可能額に対する金利や期間を決めるための式である。この話は今 (期首に) 投資を行い、毎年または毎月一定の額 M という利益が上げられるという場合の限界利率や期間などを算出するための計算式でもある。ここでも残念ながら利率に関する陽の式は求めることが出来なかった。

(1) 初期支払無、満期支払無

(8) $$n = \frac{\ln\left\{\frac{1+i}{1-\frac{P}{M}i}\right\}}{\ln(1+i)}$$

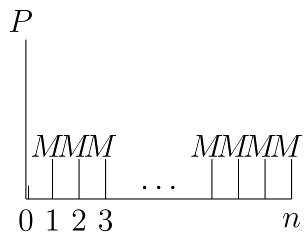
i は陽関数として求めることはできない。



(2) 初期支払無、満期支払有 (期末)

(9) $$n = \frac{\ln\left\{\frac{1}{1-\frac{P}{M}i}\right\}}{\ln(1+i)}$$

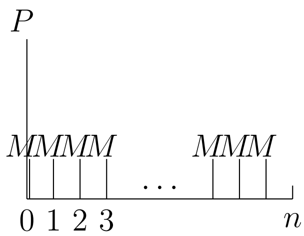
i は陽関数として求めることはできない。



(3) 初期支払有、満期支払無 (期首)

(10) $$n = \frac{\ln\left\{\frac{1+i}{1+i-\frac{P}{M}i}\right\}}{\ln(1+i)}$$

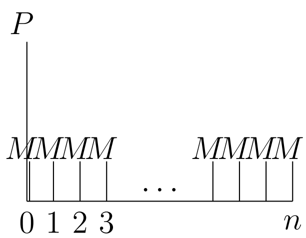
i は陽関数として求めることはできない。



(4) 初期支払有、満期支払有

(11) $$n = \frac{\ln\left\{\frac{1}{1+i-\frac{P}{M}i}\right\}}{\ln(1+i)}$$

i は陽関数として求めることはできない。



以上 (8)〜(11) を $\boldsymbol{b}' = (b1, b2)$ としてまとめると、

$$(12) \qquad n = \frac{\ln\left\{\frac{1+b2*i}{1+b1*i-\frac{P}{M}i}\right\}}{\ln(1+i)}$$

ここで、$\boldsymbol{b}$ は期末 (0,0)、期首 (1,1)、無無 (0,1)、有有 (1,0) である。
また、i を計算する陰関数は (3)〜(12) のどの関数を選んでもよい。

５．J の関数と例題

以下の関数の名前は先頭の 1 文字が目的変数、原則として以下が説明変数群の頭文字をひとつずつとってる（2 分探索関数の引数となる関数名を除く)。その順序は利率 (I)、期間 (N)、現価 (P)、終価 (S)、年価 (M) の順で、目的変数となった変数は先頭なので除かれる。*Option* の fre は複利回数は年単位では 1、月単位では 12、半期では 2、というように 12 で割れる数を入れる。それに従って年金利もそれぞれ回数分の 1 となる。年単位では年利、月単位では年利の 12 分の 1 となるようになっている。また、左引数はいずれも期末がデフォルトで (片側形のとき) 期末、2 項関数としては左引数が、0 が期末 (満期のみお金の出入り有り)、1 が期首 (0 期のみお金の出入り有り)、2 が 0 期・満期ともにお金の出入り無し、3 が 0 期・満期ともお金の出入り有り、となっている。　例題を始めるにあたってチュートリアルとして `intrest.ijs` の先頭ににある 5 つの黙示的 (*Tacit*) 関数について説明をする。

● 　チュートリアルとしての例題

(1) `effnom=: [: <: ([: >: ] % [) ^ [`

先頭の `[: <:` (…) はこれでフォークであるが、実質的には（…）以降の結果から 1 を引くというキャップドフォークである。また、(…) `^[`がフォークで、(`[:>:]%[`) は 5 個の動詞からなる 2 つのフォークの動詞で、右 3 個の動詞がフォーク、左のフォークが先と同様に今度は結果に 1 を加えるというキャップドフォークである。したがって左引数を x、右引数を y とすると、`(1+y%x)^x` から 1 を引いたのが答えになり、x を 12(ケ月) とし、y を年利 7%とすると、`(1+0.07/12)^12-1` となり、年利 7%から計算した月利を年利に換算した実効年利率 0.0722901 が出てくる。

(2) `intexpand=: 1&>.@(#~ 1&|.@(1&>)) # (#~ 1&>)`

`intrest.ijs` の中では年利率が年ごとに変わることを許しているので、`intrest list` として例えば `s=.0.09 5 0.08 3 0.075` とすると、年利が始めの 5 年間は 0.09、次の 3 年間は 0.08、以降はずっと 0.075 のように表すことにしている。この `intrest list` を毎年の利率に引き延ばそうというのが `intexpand` であり次の `stretch` である。

まず、`1&>.@` (…)`#`(…) というフォークである。右のカッコから見て行こう。`(#~ 1&>)` はフックでリスト s の中から 1 より小さいものだけ取り出す、つまり `(1>s)#s => 0.09 0.08 \\ 0.075` となる。次に `(#~1&|.@(1&<))` であるが、これもフックで`#`と `1&|.@(1&<)` とのフックで、先ほどの 1 より小さいところを 1 つシフトして `1 0 1 0 1 => 0 1 0 1 1` として s から取り出すと `5 3 0.075` となる。最後にこれと 1 と比べて大きい方を取ってくると (このやり方がとても賢い!!拍手)、 `5 3 1` となり、5 個の 0.09、3 個の 0.08、最後に 0.075 が 1 個付け足されて終了ということになる。

(3) intm=: <: @ ((^%)~ >:)

((^%)~>:) は両側形フックを２回実行する。2回目のフックは x(^%)y で、y の x 分の１乗根を求めるフックである。つまり、12((^%)~>:)0.07 => (1+0.07)(^%)12 で、12 intm 0.07 は 12 乗して実効年利が 0.07 になるような月利を計算する。 つまり (1+12 intm 0.07)^12 が 1.07 となる。

(4) stretch=: [$] , ($,: @ {:)

intexpand では最後尾の値が利率となり、それが残りの期間ずっと同じこの金利になる。それを実際にリスト化して実現するための関数である。この関数は左からフォーク、括弧の中はフックである。使い方は左引数に例えば 10(年)、右引数に intexpand の結果である下記のリストを取るとする。(…) の右引数を具体的に書くと、

0.09　0.09　0.09　0.09　0.09　0.08　0.08　0.08 0.075

であるから最後尾 0.075 をとり、,:でアイテム化して 10 個並べる。これが ($,: @ {:) の役目である。それをもともとの系列に連結して長い系列を作成したのち、頭から 10 個とる。そうすると最初の５年が 0.09、次の３年が 0.08、残りの２年が 0.075 という結果を得る。ところで、このケースではアイテム化を省略しても同じ結果を得ることが出来る。すなわち、stretch2=: [$] , ($ {:) でもよいことが確かめられる。

(5) accint=: */\ @ (1&,) @ (stretch >: @ intexpand)

この関数は最後の括弧の中以外は単項関数で、x (stretch >:@intexpand) y で計算された各年度の年利の先頭に１を連結して、前から順に累積・積を計算してゆく。この関数の逆数は毎年異なった金額を毎年異なった金利で支払って行くときの現在価値の計算に使われる。終価の場合は１年目、２年目の代わりに、満期から前に数えて満期の１年前、２年前、3 年前の金利のリストを作ってこの関数を用いることになる。

以上でチュートリアルを終えて、今回の冊子での例題を掲げる。

● 財務計算のための J 関数群

```
NB. 財務計算２     2010.02.23
NB.
NB. i 利率 Intrests       INT
NB. n 期間 Periods        PER
NB. P 現価 Present Values PV
NB. S 終価 Future  Values FV
NB. M 年価 Payments       PMT
NB. fre 年複利回数 Frequency 1～12  1,2,3,4,6,12
NB. Left Arguments 左引数
NB. Option オプション     OPT
NB.   0 期末 Arrears      ARR
```

```
NB.   1 期首 Advance      ADV
NB.   2 無無
NB.   3 有有
NB.
```

● 前回の関数名を今回のルールによって書きかえると、SP,PS,MS,SM,MP,PM は

```
   SINP=:3 : 'p*(>:i)^n=.n*f[i=.i%f[''i n p f''=.y'
   PINS=:3 : 's%(>:i)^n=.n*f[i=.i%f[''i n s f''=.y'
   MINS=:3 : 0
0 MINS y
:
if. x>:4 do. '**  x is over 4  **' return. end.
'b1 b2'=.2 2#:x{0 3 1 2
s*i%((>:i)^(n+b1))-(1+b2*i)[n=.n*f[i=.i%f['i n s f'=.y
)
   SINM=:3 : 0
0 SINM y
:
if. x>:4 do. '**  x is over 4  **' return. end.
'b1 b2'=.2 2#:x{0 3 1 2
s%i%((>:i)^(n+b1))-(1+b2*i)[n=.n*f[i=.i%f['i n s f'=.y
)
   MINP=:3 : 0
0 MINP y
:
if. x>:4 do. '**  x is over 4  **' return. end.
'b1 b2'=.2 2#:x{0 3 1 2
p*((>:i)^n)*i%((>:i)^(n+b1))-(1+b2*i)[n=.n*f[i=.i%f['i n p f'=.y
)
   PINM=:3 : 0
0 PINM y
:
if. x>:4 do. '**  x is over 4  **' return. end.
'b1 b2'=.2 2#:x{0 3 1 2
m%((>:i)^n)*i%((>:i)^(n+b1))-(1+b2*i)[n=.n*f[i=.i%f['i n m f'=.y
)
```

●今回作成した関数

```
   NIPS=:3 : 0
NB. Usage : NIPS i;P;S;fre
NB. 小数付年換算値として出てくる
```

```
if. (#y)~:4 do. '**  y must be 4 elements  **' return. end.
fre%~(^.S%P)%^.>:I=.i%fre['i P S fre'=.y
)
   INPS=:3 : 0
NB. Usage : INPS n;P;S;fre
NB. 年利換算値として出てくる
if. (#y)~:4 do. '**  y must be 4 elements  **' return. end.
fre*<:(S%P)^%N[N=.fre*n['n P S fre'=.y
)
   NISM=:3 : 0
NB. Usage : opt NISM i;S;M;fre
NB. 小数付年換算値として出てくる
0 NISM y
:
if. (#y)~:4 do. '**  y must be 4 elements  **' return. end.
'b1 b2'=.2 2#:x{0 3 1 2[I=.i%fre['i S M fre'=.y
fre%~((^.(1+b2*I)+I*S%M)%^.>:I)-b1
)
   NIPM=:3 : 0
NB. Usage : opt NIPM i;P;M;fre
NB. 小数付年換算値として出てくる
0 NIPM y
:
if. (#y)~:4 do. '**  y must be 4 elements  **' return. end.
'b1 b2'=.2 2#:x{0 3 1 2[I=.i%fre['i P M fre'=.y
fre%~(^.(1+b2*I)%(1+b1*I)-I*P%M)%^.(1+I)
)
NB. 二分探索法の関数
   bisearch=:4 : 0
NB. Usage : F bisearch lower;higher
NB. F is increasing fn.,and the root must be between lower and higher
'y1 y2'=:y[i=.0
NB. 利子だけの単項関数を扱うために引数は全て左にもってゆく
NB. To avoid Global variables, Add the extra arguments F,x,N,S,P,M
if. (_4{.>0{x)='P' do. 'F x N P M'=.x else. 'F x N S M'=.x end.
label_L1.
if.30<i=.>:i do. goto_owari.end.
z=.".F,'y0=.-:+/y1,y2'
if.z>0 do.y2=.y0 else.y1=.y0 end.
if.0.000001>|z do.goto_owari.end.
```

```
goto_L1.
label_owari.
y0
)
   MS_1=: 3 : 0
NB. 利子だけの単項関数を扱うために引数は全て左にもってゆく
NB. Usage : (opt;n;fre) MS_1 I
'Not Use a Monadic Form'
:
'b1 b2'=.2 2#:xx{0 3 1 2[N=.n*f['xx n f'=.x
if. y=0 do. %N+(1*b1)+(_1*b2) return. end.
y%((>:y)^(N+b1))-(1+b2*y)
)
   MP_1=: 3 : 0
NB. 利子だけの単項関数を扱うために引数は全て左にもってゆく
NB. Usage : (opt;n;fre) MP_1 I
'Not Use a Monadic Form'
:
N=.n*f['xx n f'=.x
((>:y)^N)*(xx;N;1)MS_1 y
)
   INSM=:3 : 0
NB. 積立金利の計算
NB. Usage : opt INSM N;S;M;fre
NB. 年利換算値として出てくる
0 INSM y
:
if. (#y)~:4 do. 'members of y is not 4' return. end.
N=.n*f['n S M f'=.y
if. S<:N*M do. 'S is less than total payments !!' return. end.
NB. To avoid Global variables, Add the extra arguments x;N;S;M
f*('M-S*(x;N;1)MS_1 ';x;N;S;M) bisearch 0;1
)
   INPM=:3 : 0
NB. 内部金利(IRR)、投資限界金利　の計算
NB. Usage : opt INPM N;P;M;fre
NB. 年利換算値として出てくる
0 INPM y
:
if. (#y)~:4 do. 'members of y is not 4' return. end.
```

```
N=.n*f['n P M f'=.y
if. P>N*M do. 'P is greater than total earnest !!' return. end.
NB. To avoid Global variables, Add the extra arguments x;N;P;M
f*('M-~P*(x;N;1)MP_1 ';x;N;P;M) bisearch 0;1
)
```

●例題 1　10 年で 100 万円を積立てたとき、それぞれ積立額を与えた時の金利は？

```
   2 INSM 10;100;7.80247;1   NB. (無・無) で積立金 7.80247 万円では 7%になる
0.0700001
   0 INSM 10;100;7.23775;1   NB. 期末 (無・有) で積立金 7.23775 万円では 7%になる
0.07
   1 INSM 10;100;6.76425;1   NB. 期首 (有・無) で積立金 6.76425 万円では 7%になる
0.0700001
   3 INSM 10;100;6.33569;1   NB. (有・有) で積立金 6.33569 万円では 7%になる
0.07
```

●例題 2　100 万円借りた時毎年一括払いで 10 年で完済するときの金額を与えたときの金利は？

```
    2 INPM 10;100;15.3486;1   NB. (無・無) で返済金 15.3486 万円では 7%になる
0.0699993
   0 INPM 10;100;14.23787;1   NB. 期末 (無・有) で返済金 14.23787 万円では 7%になる
0.0700018
   1 INPM 10;100;13.3063;1   NB. 期首 (有・無) で返済金 13.3063 万円では 7%になる
0.0699998
   3 INPM 10;100;12.4633;1   NB. (有・有) で返済金 12.4633 万円では 7%になる
0.0700008
```

● エクセルによる IRR の検証

	A	B	C	D	E
1	期	期末	期首	無･無	有･有
2			-100		-100
3	0	-100	-86.6937	-100	-87.5367
4	1	14.2378	13.3063	15.3486	12.4633
5	2	14.2378	13.3063	15.3486	12.4633
6	3	14.2378	13.3063	15.3486	12.4633
7	4	14.2378	13.3063	15.3486	12.4633
8	5	14.2378	13.3063	15.3486	12.4633
9	6	14.2378	13.3063	15.3486	12.4633
10	7	14.2378	13.3063	15.3486	12.4633
11	8	14.2378	13.3063	15.3486	12.4633
12	9	14.2378	13.3063	15.3486	12.4633
13	10	14.2378			12.4633
14		7.00007556%	6.99998234%	6.99992800%	7.00007508%
15		=IRR($B$3:$B$13,0.05)	=IRR($C$3:$C$12,0.05)	=IRR($D$3:$D$12,0.05)	=IRR($E$3:$E$13,0.05)

エクセルによる IRR 関数 [3] の確認

● Ｊの irr 関数[2] による結果

```
   cf0=.(-100),(10#14.2378)
   0.05 irr cf0
0.0700008
   cf1=.(13.3063-100),(9#13.3063)
   0.05 irr cf1
0.0699998
   cf00=.(-100),(9#15.3486)
   0.05 irr cf00
0.0699993
   cf11=.(12.4633-100),(10#12.4633)
   0.05 irr cf11
0.0700008
```

● なお、前回の会合で、具体的なローン金額を、というお話だったので、
1000 万円を金利 2.5%で 30 年の月払い契約をするときの月賦はいくらになるか？
期首払いとすると (回数が多いので期にあまりこだわらなくてもよい)

```
   1 MINP 0.025;30;1000;12     NB. 期首払いで計算
3.94299442
```

ちなみに期末払いだと、

```
   0 MINP 0.025;30;1000;12
3.95120899   NB. 期末と期首では月々わずか 80 円ほどの違いである
```

月４万円だとどのくらいの金利と考えてよいか？(これが今回の目玉関数である)

```
   1 INPM 30;1000;4;12
0.0261012018
```

月々同じ金額を貯金してゆき、金利 2.5%で、30 年後に 1000 万円になるときの積立額は？

```
    0 MINS 0.025;30;1000;12
1.86787565   NB. わずか１万 9000 円弱でよい。借りることは恐ろしい !!
             NB. 今の 1000 万円はものすごく価値があるということである
```

【参考文献】

【1】志村正人（2006)： 内部収益率・IRR、 JAPLA 研究会 2006.1.25 資料

【2】J601 システムパッケージ (1994-2006) ： ファイナンスパッケージ、j601/system/packages/finance/interest.ijs 、j601_win.exe を解凍すると得られる

【3】Office 2003 Microsoft Excel（2003)： HELP 財務計算、Excel 内部関数資料

【4】竹内寿一郎（2010)： 財務計算あれこれ 第１回 __現価、終価、年価__、 JAPLA 研究会 2010.1.23 資料