エクゾチックオプション価格のシミュレーション　その８ −バリアーオプションの価格式 (3) −

Numerical Tests on the Exotic Option Pricing Models − 8 − The Barrier Option Pricing Model(3)

(株) 竹内ハガネ商行
竹内寿一郎

５．Down and Out Call (B $\leq$ K) の場合の評価式

このケースは前々回の No.9 に相当し[3]、バリアー価格 (B) がスポット価格より小さい (これを Down という) とき、ノックアウトで、コールオプション、行使価格 (K) がバリアー価格 (B) より大きい場合である。たとえば、ここ 5 節では次のような取引である。

原資産	ドル円為替レート
満期	6ヶ月後
スポット価格	120 円
バリアー価格	90 円
行使価格	100 円
オプション	ノックアウトコールオプション

現在の円の対ドル為替レートが 120 円のときの、行使価格 100 円のコールオプションではあるが、オプション期間の 6ヶ月以内に為替レートが、1 度でも 90 円をつけたときこのオプションは消滅してしまう、ということである。そういうときの評価式を求めることになる。

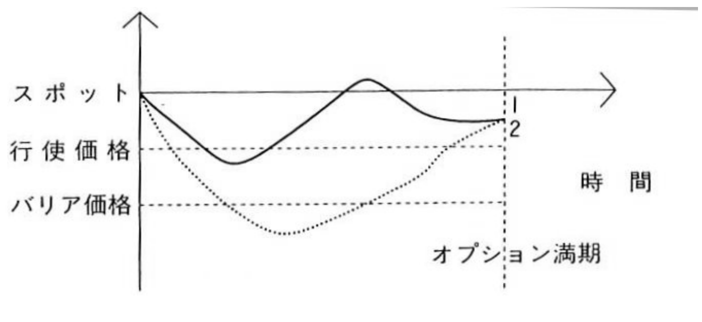

図 1. Down のとき、満期に価格が行使価格以上になる 2 つの経路
(行使価格 100 円、バリアー価格 90 円、スポット価格 120 円)

バリアー価格を 90 円として、次の 2 つの経路を考える

[1] 満期 T に価格が行使価格 100 円以上になる場合 (ここでは過去の経路は一切問わない)、

[2] オプション期間中に一度はバリアー価格 90 円以下となり、その後満期 T では価格が 100 円以上となる。

オプション期間中に一度もバリアー価格に達せず (バリアー価格以下にならず)、オプション満期 T に価格 $S(T)$ が、行使価格 K より大きくなっているとき、キャッシュフロー $S(T)-K$

が得られる評価額を C(これが求める評価額)、経路 [1] での価格を C_I、経路 [2] での価格を C_{II} で表すとすると、

$$C = C_I - C_{II}$$

と書くことができる。

経路 [2] は、経路 [1] が過去の経路は一切問わないので [1] の部分であり、バリアーに到達すること無く価格 S(T) が行使価格 K 以上になる確率は、[1] の確率から [2] の確率を引けばよい。すなわち、このときの評価額は [1] のときの評価額 C_I から [2] のときの評価額 C_{II} を引けば良いことになる。

そこでまず、満期に価格が行使価格以上になるとき、キャッシュフロー $S(T) - K$ を得るオプションの評価額 C_I を計算してみよう。

C_1：満期 T で価格が行使価格以上のときの価格

とすると C_I は

$$C_I = C_1$$

で表される。

[1] の確率は単に満期に行使価格以上と言う条件なので、これはプレインバニラオプションの確率に一致する（補遺または文献【2】を参照のこと）。従って、

(1)　$C_1 = S(t)\Phi(d_1 + \sigma\sqrt{T-t}) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_1)$

ここで、

(2)　$d_1 = \dfrac{\ln\frac{S(t)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

である。

C_{II} の計算は前回における m を使って表現することができる【4】。いま、$S(\cdot)$ が B よりずっと小さい $Z(t)$ から出発して満期 T で $(B \leq K \leq)S(T)$ に到達する経路に注目し、この経路上で初めて B に到達する時点を t_0 とする。つまり、出発点 t では、

(3)　$Z(t) = \dfrac{B^2}{S(t)}$　：　B は $Z(t)$ と $S(t)$ の幾何平均

であるとする。

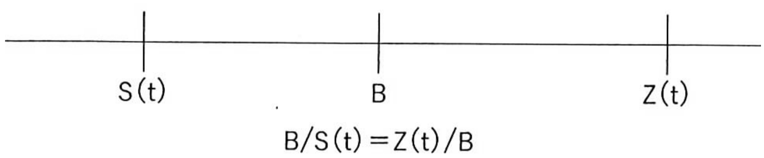

図 2. B はスポット価格 $S(t)$ と $Z(t)$ の幾何平均である
ただし、図の左が大きく、右が小さく、通常の大小のスケールを逆にしている

ブラウン運動の定義から系列は過去の時点や、経路に無関係なので t_0 で B に到達した後の経路は $S(t)$ を出発点としても、$Z(t)$ を出発点としても t_0 以降は全く同じ性質を持って動く。

そこで $Z(t)$ を出発点として満期でキャッシュフロー $S(T) - K$ を得る経路に対する評価額を C'_{II} とすると、$S(t)$ を出発点とする経路に対する評価額 C_{II} との違いは、出発点から B に

初めて到達する確率 m の違いだけに起因するものである。従って、その違いだけを考慮すれば C'_{II} から C_{II} を求めることが出来る。そこでまず C'_{II} を求めてみる。

$Z(t)$ を出発して B を超えて満期で $(B \le K \le) S(T)$ となるオプション価格の評価額は、途中のバリアーには関係しないので (1) と同じようにプレインバニラオプションの期待値で計算できる。

(4)　　$C'_{II} = C_3$

(5)　　$C_3 = E_K^\infty\{max(0, S(T) - K)|Z(t)\}$（ここでの期待値の積分範囲 K は無くてもよい）

$$= Z(t)\Phi(d_3 + \sigma\sqrt{T-t}) - e^{-\gamma(T-t)}K\Phi(d_3)$$
$$= \frac{B^2}{S(t)}\Phi(d_3 + \sigma\sqrt{T-t}) - e^{-\gamma(T-t)}K\Phi(d_3)$$

(6)　　$d_3 = \dfrac{\ln\frac{Z(t)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$,　　　ここで、$Z(t)$ を $S(t)$ で表して、

(7)　　$d_3 = \dfrac{\ln\frac{B^2}{KS(t)} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

以上をまとめると、

(8)　　$C = C_I - C_{II} = C_I - mC'_{II} = C_1 - mC_3$

(9)　　$m = \left(\dfrac{B}{S(t)}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}$

を得る。

６．J による Down and Out Call (B $\le$ K) の場合の評価式

J による関数で、バリアーオプションの評価式をつくり数値を求める。一方、シミュレーションによってブラウン運動の系列を発生させ、バリアーに到達したらプレインバニラオプションを消滅させることで、バリアーオプションの価格の期待値を計算して理論値と比較することにする。

まず恒例により、正規分布に関する J の関数を定義する。ただし、バージョン $J6$ に準拠しているので、$J5$ 以前のバージョンでは引数 x、y を x.、y. に変えなければならない。

```
NB. Normal Distribution
   stnormal=:(%:@o.@2:)(%~)^@-@-:@*:
   NP=:3 : 0
(stnormal y)*y%(-‘%‘+‘%)/,(>:+:k),.(*:y)*>:k=.i.28
)
   NQ=:3 : 0
(stnormal y)*%‘+/1,,y ,.>:i.28
)
   Ndist=:3 : 0
if. 3.3<z=:|y do. q=:NQ z else. q=:0.5-NP z end.
if. 0<:y do. q=:1-q end.
)
NB. Yamanouti’s Formula
```

```
   Ninv_y=:3 : 0
z=.-^.4*y*(1-y)
x=.%:z*(2.0611786-5.7262204%(z+11.640595))
if. y>0.5 do. x=.-x end.
)
NB. Normal Random Numbers
NB.    Rndm_Norm Size Mu Sigma
   Rndm_Norm=:3 : 0
'Num Mean Sigma'=.y
Mean+Sigma*Ninv_y"0 (?Num#10000000)%10000000
NB.{.Ninv_bm"1 z=:(?(Num,2)$10000000)%10000000
)
```

●以下がバリアーオプション No.9 の価格式である。

```
NB. =========================================================
NB. Barrier Option Pricing Model No.09
NB. J.Takeuchi Jan. 2009
NB. Usage: Barrier09 data
NB. data is list ( 6 menbers)
NB. SpotPrice ExePrice BarrierPrice Term(Month) Sigma FreeRate
NB. ex. data=. 120 100 90 6 30 5
NB. =========================================================
   Barrier09=:3 : 0
'Spot Kosi Barrier Term Sigma Rate'=. y
Ter=:Term%12[Sig=:Sigma%100[Rat=:Rate%100
m=.(Barrier%Spot)^((2*Rat%Sig^2)-1)
er=.^-Rat*Ter
d1=.ddd Spot,Kosi
d3=.ddd (Barrier^2),Kosi*Spot
C1=.(Spot*Ndist(d1+Sig*%:Ter))-Kosi*er*Ndist(d1)
C3=.(((Barrier^2)%Spot)*Ndist(d3+Sig*%:Ter))-Kosi*er*Ndist(d3)
C=.C1-m*C3
)
NB.===========================================================
NB.ddd Numerator(Bunsi),Denominator(Bunbo)
NB.Usage : ddd Spot,Barrier
NB.===========================================================
   ddd=:3 : 0
'Nume Deno'=.y
((^.Nume%Deno)+(Rat--:*:Sig)*Ter)%Sig*%:Ter
```

```
)
NB.============================================================
NB.Simulation for Barrier Option Type 9
NB.Numbers Barrier_09 Spot Kousi Barrier Term Volatility Rate
NB.============================================================
   Barrier_09=:4 : 0
'S0 K B T Vol r'=.y
i=.0[Smin=.S=.MM#S0[MM=.x
label_L1.
if. T<i=.>:i do. goto_owari. end.
z=.Rndm_Norm MM,0,1
S=.S+(S*(r%100)*(1%12))+S*(Vol%100)*(%:1%12)*z
Smin=.S<.Smin
NB. print S
goto_L1.
label_owari.
w=.(S-K)*(p=:Smin>B)
NB. w=.(S-K)
C=.(^-(r%100)*(T%12))*MM%~+/(0<w)#w
)
NB. ============================================
NB. Plain Vannila Option Model
bs =: 3 : 0
'a b c d e'=. y
t=. c % 12
u=. (^. a % b) + t* (e1=.e % 100) - -:(bor=.d % 100) ^2
p2=. u % (bor * %: t)
p1=. p2 + bor * %: t
n1=. Ndist p1
n2=. Ndist p2
bs=. (a * n1 ) - b *n2 *( ^ (-e1) * t)
bs
)
NB. ============================================
```

●まず、今回の例題から、スポット価格 120 円、
行使価格 100 円、バリアー価格 90 円、オプション期間 6 ヶ月、
リスクフリー金利 5%、ボラティリティ 30%では、

```
   Barrier09 120 100 90 6 30 5
24.1793
```

●バリアーをあげてゆくと、

```
   Barrier09 120 100 85 6 30 5
24.3964
   Barrier09 120 100 80 6 30 5
24.4485
   Barrier09 120 100 75 6 30 5
24.457
   Barrier09 120 100 60 6 30 5
24.458
```

ほとんどバリアーに関係がなくなる。
ちなみにブラック・ショールズ（プレインバニラオプション）では

```
   bs 120 100 6 30 5
24.458
```

である。

●期間を長くすると、バリアーの影響が大になる。

```
   Barrier09 120 100 90 12 30 5
27.4263
   Barrier09 120 100 85 12 30 5
28.28
   Barrier09 120 100 80 12 30 5
28.6727
   Barrier09 120 100 75 12 30 5
28.8225
   Barrier09 120 100 60 12 30 5
28.8802
   bs 120 100 12 30 5
28.8804

   Barrier09 120 100 90 24 30 5
31.5252
   Barrier09 120 100 85 24 30 5
33.4582
   Barrier09 120 100 80 24 30 5
34.7122
   Barrier09 120 100 75 24 30 5
35.454
   Barrier09 120 100 60 24 30 5
36.0985
```

```
   bs 120 100 24 30 5
36.1277
```

●シミュレーション による検討。
まず、今回の例題から。
スポット価格 120 円、行使価格 100 円、バリアー価格 90 円
、オプション期間 6 ヶ月、リスクフリー金利 5%、ボラティリテ
ィ30%では

```
   100000 Barrier_09 120 100 90 6 30 5
24.4125
   100000 Barrier_09 120 100 90 6 30 5
24.4883
   100000 Barrier_09 120 100 90 6 30 5
24.4883
```

やや高めに出る。計算値は 24.1793 である。
バリアーを低くしてゆくと、

```
   100000 Barrier_09 120 100 85 6 30 5
24.5357
   100000 Barrier_09 120 100 80 6 30 5
24.4538
   100000 Barrier_09 120 100 75 6 30 5
24.442
   100000 Barrier_09 120 100 70 6 30 5
24.5946
   100000 Barrier_09 120 100 60 6 30 5
24.5007
   100000 Barrier_09 120 100 0 6 30 5
24.6498
   100000 Barrier_09 120 100 0 6 30 5
24.5659
```

プレインバニラ（ブラック・ショールズ）では、バリアーをゼロとして

```
   Barrier09 120 100 0 6 30 5
24.458
```

【参考文献】

【1】山下司 (2001)：オプションプライシングの数理　－基礎理論と専門書のブリッジテキストー　金融財政事情研究会

【2】竹内寿一郎・本田皓士（2006)：エキゾチックオプション価格のシミュレーション　その１　－キャッシュデジタルとプレインバニラオプションー　JAPLA 2006 シンポジウム　2006.12.9 資料

【3】竹内寿一郎（2008）：エキゾチックオプション価格のシミュレーション　その６　ーバリアーオプションの価格式 (1) ー　JAPLA2008　夏合宿 2008.8.02-04 資料

【4】竹内寿一郎（2008）：エキゾチックオプション価格のシミュレーション　その７　ーバリアーオプションの価格式 (2) ー　JAPLA 2008 シンポジウム　2008.12.6 資料

【補遺】

これまでのように価格 $S(T)$ が幾何ブラウン運動をすると仮定すると、

(1)　$dS(T) = rS(T)dt + \sigma S(T)dz$

なる確率微分方程式を満たす。ここで、r は公平なる利率（無リスク世界における金利）、σ は $S(T)$ のボラティリティ、dz は標準ブラウン運動の増分を表している。

そこで始めの時点を t、満期を T とし、伊藤の定理、さらにブラウン運動の分散が $\sigma^2\times$ 時間であることを考慮すると[2]、

(2)　$\dfrac{\{\ln S(T)/S(t)\} - (r - \sigma^2/2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$　$\sim$　標準正規分布

であることから、満期 T においてキャッシュフロー $S(T) - K$ を得るオプションの評価額は、

(3)　$C_1 = E\{Max(0, S(T) - K)\} = \int_K^\infty (S(T) - K)f(S(T))dS(T)$

ここで、$f(S(T))dS(T)$ は $S(T)$ の確率分布で (2) の変換により標準正規分布にしがう。
この式はプレインバニラコールオプションと全く同じなので、

(4)　$C_1 = S(t)\Phi(d_1 + \sigma\sqrt{T-t}) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_1)$

ここで、

(5)　$d_1 = \dfrac{\ln\frac{S(t)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

である。