スペクトル分解

SHIMURA Masato
jcd02773@nifty.com

2009 年 10 月 22 日

目次

1 スペクトル分解

行列を射影の一次結合で表すことをスペクトル分解という。

固有値が重根の場合には, 対角化可能か否かに区分する。対角化出来ない場合は部分分数展開が必要である。

行列 A がスペクトル分解可能のとき、その射影行列は $P_1, \cdots .P_r$ は次により求められる。ラグランジュ補完法のマトリクス版 · シルベスタ補完法を用いる

$$P_k = \frac{(A-\lambda_1 I)\cdots \underbrace{\quad k \quad}\cdots (A-\lambda_r I)}{(\lambda_k-\lambda_1)\cdots \underbrace{\quad k \quad}\cdots (\lambda_k-\lambda_r)} \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} \\
P_2 &= \frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_3 I)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} \\
P_3 &= \frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$
A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r \tag{3}
$$

$$
I = P_1 + \cdots + P_r \tag{4}
$$

■ .

Z) 固有値と固有ベクトルによる対角化との違いは

A) 固有値と固有ベクトルは両国の花火を私はイメージしています。固有値は何寸、何尺という花火玉の大きさで墨田川ではあまり大きいのは打ち上げられない。固有ベクトルは花火の方向示しデザインである。対角化は夜空の花火の名前。

Z) 固有値の重根は大輪の菊華が時間を遅らせ色を変えて出てくる。

A) スペクトル分解はプリズムや影絵を思い浮かべると良い。
射影はまさにプリズムある。射影を用いた影絵では射影が合成され微分方程式の解が浮かび出る。

Z) 液晶プロジェクタは複数の光源を用いる。単根ならば固有値毎の光源があると思えばよい。光源をぐっと減らす（対角化不能）には技術がいる。

1.1 対角化が可能な場合（1）単根

1.1.1 Script

単根の場合の Script

```
NB. find Spectol
NB. ussage (\:m) sp matrix
NB. Usage:(; 1{ char_lf tdata) sp tdata
m=:=/~@i.@#@[      NB. make I
n=:i.@#@[          NB. i. x
tm=:|./(" 0 1) ~&n&[  NB. make index
li=: [ */ m@[      NB. Lamda I
bb1=:([ tm ]) { [
bb2=: ( {.("1) - }.("1))@bb1
```

```
bb3=: (*/ "1) @ bb2
k1=:] - ("2) li    NB. A-Lamda I
k2=: (<"2)@k1      NB. boxed k1
k3=: >@ind { "1 k2 NB. combination of k2
k4=:(+/ . * )/("3)
k5=:k4@(>@k3)
ind=: ( }. "1)@tm NB. index
sp=:k5 % bb3   NB. find spectol
```

Example 1 (Kasahara 1 Ex4)

```
  D0
 1 3 _3
 1 3 _1
_2 2  0
```

ルベリエ・ファディーエフ法で固有値を求める

高次方程式の因数分解は手数であるが固有値が求めてあれば容易に書き表すことが出来る。この因数分解の式はスペクトル分解に用いる。

```
   char_lf D0
+-+-------+----------+
|1|4 2 _2|16 _4 _4 1|
+-+-------+----------+
```

$f = 16 - 4\lambda - 4\lambda^2 + \lambda^3$

$= (4 - \lambda)(2 - \lambda)(-2 - \lambda)$

固有値 4 2 -2

スペクトル分解

```
 <"2(a=.; 1{  char_lf D0) sp D0
+------------+------------+------------+
|1r2 1r2 _1r2|   0   0   0|1r2 _1r2 1r2|
|1r2 1r2 _1r2|_1r2 1r2 1r2|  0    0   0|
|  0   0    0|_1r2 1r2 1r2|1r2 _1r2 1r2|
+------------+------------+------------+
NB. Lambda=4      2            -2
```

$$
\begin{array}{r|ll}
\lambda = 4 & P_1 = & \dfrac{(A-2I)(A-{\_}2I)}{(4-{\_}2)(4-2)} \\[2ex]
\lambda = 2 & P_2 = & \dfrac{(A-4I)(A-{\_}2I)}{(2-4)(2-{\_}2)} \\[2ex]
\lambda = -2 & P_3 = & \dfrac{(A-4I)(A-2I)}{(-2-4)(-2-2)}
\end{array}
$$

$$A = 4P_1 + 2P_2 - 2P_3$$

1.1.2　経過と説明

固有値の組み合わせ
$(4-2)(4-{\_}2)$
$(2-{\_}2)(2-4)$
$(-2-4)(-2-2)$
	`   a bb1 D0`
	`  4  2 _2`
	`  2 _2  4`
	` _2  4  2`

上の計算	`   a bb2 D0`
	`  2  6`
	`  4 _2`
	` _6 _4`

分母 `*/("1) a bb2 D0` 上を横（ランク 1）に掛け合わせる	`   a bb3 D0` `12 _8 24`

<table>
<tr>
<td>$(A - 4I); (A - 2I); (A - \_2I)$</td>
<td><pre>
k2 is <"2 a k1 D0
+--------+-------+-------+
_3 3 _3	_1 3 _3	3 3 _3
1 _1 _1	1 1 _1	1 5 _1
_2 2 _4	_2 2 _2	_2 2 2
+--------+-------+-------+
</pre></td>
</tr>
<tr>
<td>$(A - 2I)(A - \_2I)$
$(A - 4I)(A - \_2I)$
$(A - 4I)(A - 2I)$</td>
<td><pre>
   a k3 D0
+--------+--------+
_1 3 _3	3 3 _3
1 1 _1	1 5 _1
_2 2 _2	_2 2 2
+--------+--------+
3 3 _3	_3 3 _3
1 5 _1	1 _1 _1
_2 2 2	_2 2 _4
+--------+--------+
_3 3 _3	_1 3 _3
1 _1 _1	1 1 _1
_2 2 _4	_2 2 _2
+--------+--------+
</pre></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>内積演算
$(A - 2I)(A - \_2I)$
$(A - 4I)(A - \_2I)$
$(A - 4I)(A - 2I)$</td>
<td><pre>
 <"2 a k5 D0
+------+-------+---------+
6 6 _6	0 0 0	12 _12 12
6 6 _6	4 _4 _4	0 0 0
0 0 0	4 _4 _4	12 _12 12
+------+-------+---------+
</pre></td>
</tr>
<tr>
<td>k5 % bb3</td>
<td><pre>
  <"2 a (k5 % bb3) D0
+------------+-----------+------------+
|1r2 1r2 _1r2| 0   0   0|1r2 _1r2 1r2|
|1r2 1r2 _1r2|_1r2 1r2 1r2| 0   0   0|
| 0   0   0|_1r2 1r2 1r2|1r2 _1r2 1r2|
+------------+-----------+------------+
</pre></td>
</tr>
</table>

式 4($I = P_1 + \cdots + P_r$) より

```
 +/ > <"2 (;1{char_lf D0) sp D0
1 0 0
0 1 0
0 0 1
```

式 3($A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r$) より

```
 ({@> 4 2 _2)* L:0   <"2 (;1{char_lf D0) sp D0
+------+------+-------+
|2 2 _2| 0 0 0|_1 1 _1|
|2 2 _2|_1 1 1| 0 0  0|
|0 0  0|_1 1 1|_1 1 _1|
+------+------+-------+

D0;+/ > ({@> 4 2 _2)* L:0   <"2 (;1{char_lf D0) sp D0
+-------+-------+
```

```
| 1 3 _3| 1 3 _3|
| 1 3 _1| 1 3 _1|
|_2 2  0|_2 2  0|
+-------+-------+
NB. D0
```

1.1.3　対角化

各固有値の射影からベクトルを 1 本づつ取ってきて対角化できる。

```
  ] v0=.|: ;("1),.{."1 L:0 <"2 a sp D0
1r2    0 1r2
1r2 _1r2   0
  0 _1r2 1r2
```

```
   (%.v0) +/ . * D0 +/ . *  v0
4 0  0
0 2  0
0 0 _2
```

■Example 2　$D1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

```
D1=.2 _2 3,1 1 1,:1 3 _1
2 _2  3
1  1  1
1  3 _1
```

```
   char_lf D1
+-+------+---------+
|1|3 _2 1|6 _5 _2 1|
+-+------+---------+
```

$fx = 6 - 5\lambda - 2\lambda^2 + \lambda^3$

固有値 (Eigenvalue) 3 -2 1

$$P_1 = \frac{(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} = \frac{1}{(3-(-2))(3-1)}\begin{bmatrix}4 & -2 & 3\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & -2\end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}5 & 1 & 4\\ 5 & 1 & 4\\ 5 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$P_2 = \frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_3 I)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} = \frac{1}{(-2-3)(-2-1)}\begin{bmatrix}-1 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & -2\end{bmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix}0 & 11 & -11\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -14 & 14\end{bmatrix}$$

$$P_3 = \frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} = \frac{1}{(1-3)(1-(-2))}\begin{bmatrix}-1 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -2 & 3\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{-6}\begin{bmatrix}-3 & 5 & -2\\ 3 & -5 & 2\\ 3 & -5 & 2\end{bmatrix}$$

スペクトル分解は

$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_{31}$

となる。LF 法で求めた固有ベクトルと比較すると LF 法は分子の部分と同一である。

固有値毎に各縦ベクトルのウエイトが相互に調整されている。

```
      spectol D1
+------------+--------------+--------------+
|1r2 1r10 2r5|0  11r15 _11r15| 1r2 _5r6  1r3|
|1r2 1r10 2r5|0   1r15  _1r15|_1r2  5r6 _1r3|
|1r2 1r10 2r5|0 _14r15  14r15|_1r2  5r6 _1r3|
+------------+--------------+--------------+
```

```
   char_evec D1
+-----+---------+--------+
|3    |_2       |1       |
+-----+---------+--------+
|5 1 4|0  11 _11|_3  5 _2|
|5 1 4|0   1  _1| 3 _5  2|
|5 1 4|0 _14  14| 3 _5  2|
+-----+---------+--------+
```

1.2　対角化が可能な場合（1）重根の場合

重根が現れた場合でも縦の固有ベクトルがマトリクスのサイズと同じ本数取れる場合は対角化できる。

この場合は重根があるので射影は重複分少なくなるが射影分解は可能である。

■Example 3　笠原（2）

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + z$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + 4y + z$$
$$\frac{dz}{dt} = 2x - 4y$$

$$D2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$t = 0$ での初期値は x_0

```
D2=: 1 2 1 , _1 4 1,: 2 _4 0
   D2
 1  2 1
_1  4 1
 2 _4 0
```

```
   char_lf D2
+-+-----+---------+
|1|2 2 1|_4 8 _5 1|
+-+-----+---------+
```

$f = -4 + 8\lambda - 5\lambda^2 + \lambda^3 = -(\lambda - 2)^2(-\lambda + 1)$

固有値 2 2 1

因数分解は固有値がプラスであっても単純ではない。符号のチェックが必要である。

- 射影

$$\begin{array}{ll|l} P_1 = \quad f_1(\lambda) = \dfrac{\lambda - 1}{2 - 1} = \lambda - 1 & \Longrightarrow A - I & \lambda = 2 \\ P_2 = \quad f_2(\lambda) = \dfrac{\lambda - 2}{1 - 2} = -(\lambda - 2) & \Longrightarrow -(A - 2I) & \lambda = 1 \end{array}$$

- 射影の計算

```
   I=. =/~i.3
D2-I   NB. P1 /固有値=2
 0  2  1
_1  3  1
 2 _4 _1
```

```
  - D2-2*I NB. P2 /固有値=1
 1 _2 _1
 1 _2 _1
_2  4  2
```

- 式 4 $(I = P_1 + \cdots + P_r)$

```
 (D2-I)+  -D2-2*I
1 0 0
0 1 0
0 0 1
```

- 式 3 $(A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r)$

```
D2; (2*D2-I)+  -D2-2*I
+-------+-------+
| 1  2 1| 1  2 1|
|_1  4 1|_1  4 1|
| 2 _4 0| 2 _4 0|
+-------+-------+
D2
```

- 固有ベクトルとの関係（単根のようにシンプルではない.....）

```
   }: dgeev_jlapack_ D2
```

```
+--------------------------+-----+
|0.707107 _0.408248         0|2 1 2|
|0.424264  0.816497 0.894427|     |
|0.565685  0.408248 0.447214|     |
+--------------------------+-----+
```

- 解

  $e^{Mt} = e^{2t}P_1 + e^{t}P_2$

- 解

  $x = x_0 e^t + 2y_0(e^{2t} - e^t) + z_0(e^{2t} - e^t)$

  $y = x_0(-e^{2t} + e^t) + y_0(3e^{2t} - 2e^t) + z_0(e^{2t} - e^t)$

  $z = 2x_0(e^{2t} + e^t) + 4y_0(-e^{2t} + e^t) + z_0(-e^{2t} + 2e^t)$

1.3 対角化出来ない場合

重根があって対角化出来ない場合は、部分分数展開を行った後、スペクトル分解のジョルダン標準型版と言うべき形に持ち込む。

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)} = \frac{g_1(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{m1}} + \cdots + \frac{g_r(\lambda)}{(\lambda-\lambda_r)^{mr}} \tag{5}$$

射影は補足が必要で次により計算する

$$exp(tA) = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda jt} \cdot \left\{ I + \frac{t}{1!}(A-\lambda_j I) + \cdots + \frac{t^{mj-1}}{(m_j-1)!}(A-\lambda_j I)^{mj-1} \right\} P_j \tag{6}$$

一般スペクトル分解/ジョルダン分解

$$S = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r \tag{7}$$
$$N = (A-\lambda_1 I)P_1 + \cdots + (A-\lambda_r I)P_r \tag{8}$$
$$A = S + N \tag{9}$$

1.3.1 部分分数展開

重根の場合で固有ベクトルが必要分取れず対角化できない場合は部分分数展開を行う。
部分分数展開は数式処理を伴わない数値計算言語では些か手強く手計算を伴う。

Example 4　　issue:　笠原

```
   D330
 2  0 1
_1  3 1
 1 _1 2


   char_lf d330
+-+-----+-----------+
|1|3 2 2|_12 16 _7 1|
+-+-----+-----------+
```

$f = -12 + 16\lambda - 7\lambda^2 + \lambda^3 = (\lambda-3)(\lambda-2)^2$

固有値：　3 2 2

部分分数展開 $\dfrac{1}{(\lambda-3)(\lambda-2)^2}$

$$\frac{1}{(\lambda-3)(\lambda-2)^2}=\frac{A}{\lambda-3}+\frac{B}{(\lambda-2)^2}+\frac{C}{\lambda-2}$$

分母を払う 分母を払う

$$1=A(\lambda-2)^2+B(\lambda-3)+C(\lambda-3)(\lambda-2)$$
$$1=A(\lambda^2-4\lambda+4)+B(\lambda-3)+C(\lambda^2-5\lambda+6)$$
$$1=(A+C)\lambda^2+(-4A+B-5C)\lambda+4A-3B+6C$$
$$\begin{cases} A & & +C & =0 \\ -4A & +B & -5C & =0 \\ 4A & -3B & +6C & =1 \end{cases}$$
$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & -3 & 6 & 1 \end{array}\right.$$

連立方程式 連立方程式を解く

```
   ] a0=. 1 0 1 0, _4 1 _5 0,: 4 _3 6 1
  1  0  1 0
_4  1 _5 0
 4 _3  6 1


   cr a0  NB. cramer method
1 0 0  1
0 1 0 _1
0 0 1 _1
```

部分分数 戻して通分する

$$\frac{1}{(\lambda-3)(\lambda-2)^2}=\frac{1}{\lambda-3}+\frac{-1}{(\lambda-2)^2}+\frac{-1}{\lambda-2}$$
$$\frac{1}{\lambda-3}+\frac{-\lambda+1}{(\lambda-2)^2}$$

スペクトルを求める

部分分数	$\frac{1}{(\lambda-2)^2(\lambda-3)} = \frac{-\lambda+1}{(\lambda-2)^2} + \frac{1}{\lambda-3}$ $(-\lambda+1)(\lambda-3)+(\lambda-2)^2$
射影を求める $P_1 = (-A+I)(A-3I)$ $P_2 = (A-2I)^2$	$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
$S = 2P_1 + 3P_2$	$2P_1 + 3P_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
$N = (A-2I)P_1$ $A = S + N$	$(A-2I)P_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A = S + N$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

■Example 5　笠原 3 例題 17

```
   ] D4=. 3 1 _1 , 1 2 _1,: 2 1 0
3 1 _1
1 2 _1
2 1  0

   char_lf D4
+-+-----+---------+
|1|2 2 1|_4 8 _5 1|
+-+-----+---------+
```

$-4 + 8\lambda - 5\lambda^2 + \lambda^3 = (\lambda-2)^2(\lambda-1)$

固有値　2 2 1

部分分数展開　$\dfrac{1}{(\lambda-2)^2(\lambda-1)}$

$$\frac{1}{(\lambda-2)^2(\lambda-1)}=\frac{A}{\lambda-2}+\frac{B}{(\lambda-2)^2}+\frac{C}{\lambda-1}$$

分母を払う　分母を払う

$$1=A(\lambda-2)(\lambda-1)+B(\lambda-1)+C(\lambda-2)^2$$
$$1=A(\lambda^2-3\lambda+2)+B(\lambda-1)+C(\lambda^2-4\lambda+4)$$
$$1=(A+C)\lambda^2+(-3A+B-4C)\lambda+2A-B+4C$$
$$\left\{\begin{array}{cccc} A & & +C & =0\\ -3A & +B & -4C & =0\\ 2A & -B & +4C & =1\end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 1 & -4 & 0\\ 2 & -1 & 4 & 1\end{array}\right.$$

連立方程式　連立方程式を解く

```
   1 0 1 0, _3 1 _4 0,: 2 _1 4 1
 1  0  1 0
_3  1 _4 0
 2 _1  4 1

  cr 1 0 1 0, _3 1 _4 0,: 2 _1 4 1
1 0 0 _1
0 1 0  1
0 0 1  1
```

部分分数　戻して通分する

$$\frac{1}{(\lambda-2)^2(\lambda-1)}=\frac{-1}{\lambda-2}+\frac{1}{(\lambda-2)^2}+\frac{1}{\lambda-1}$$
$$\frac{-\lambda+3}{(\lambda-2)^2}+\frac{1}{(\lambda-1)}$$

スペクトルを求める

部分分数	$\frac{1}{(\lambda-2)^2(\lambda-1)} = \frac{-\lambda+3}{(\lambda-2)^2} + \frac{1}{\lambda-1}$ $(-\lambda+3)(\lambda-1)+(\lambda-2)^2$
射影を求める $P_1 = ((-A)+3I)(A-I)$ $P_2 = (A-2I)^2$	$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

```
cr=: %.}:"1
I=: =/~i.3

 p1=. ((-D4)+3*I)+/ . * D4-I
 p2=. (D4-2*I) +/ . * D4-2*I

   p1;p2
+------+------+
|1 0  0| 0 0 0|
|1 1 _1|_1 0 1|
|1 0  0|_1 0 1|
+------+------+
```

1.3.2 射影と微分方程式

$I = P_1 + \cdots + P_r$ は成立する

```
+/>   p1;p2
1 0 0
0 1 0
0 0 1
```

$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r$ は成立しない

```
D4; +/>  ({@> 2 1) * L:0 p1;p2
+------+------+
|3 1 _1|2 0  0|
|1 2 _1|1 2 _1|
```

```
|2 1  0|1 0  1|
+------+------+
```
D4

式 6 より

$$e^{tA} = e^{Mt}P_1 + e^{Mt}P_2 = e^{2t}(I + \frac{t}{1!}(A - 2I))P_1 + e^{t}P_2$$

2 Reference

1 笠原 皓司「行列の構造」日本評論社 1994

2 笠原 皓司「線形代数と固有値問題」現代数学社 1972/2005(増補)

3 笠原 皓司「微分方程式」日本評論社 1994

4 笠原 皓司「微分方程式対話（新版）」日本評論社 1995

ASHIMURA Masato (Japan APL Association)

Document and J Script

http://www.homepage3.nifty.com/asagaya_avenue

J Language Download http://www.jsoftware.com

付録 A　部分分数展開

■Example 5　.

$\dfrac{1}{\lambda^2(1-\lambda)}$ を部分分数展開する

- 次のように置く (A はダミー)
  $\dfrac{1}{\lambda^2(1-\lambda)} = \dfrac{A}{\lambda} + \dfrac{B}{\lambda^2} + \dfrac{C}{\lambda - 1}$
- 展開する
  $1 = A\lambda(\lambda - 1) + B\lambda(\lambda - 1) + C\lambda^2$
  $1 = A\lambda^2 - A\lambda + B\lambda - B + C\lambda^2$

  [*1]
- マトリクスフォームに展開し、クラメール法で解く

$$
\begin{array}{r|llll|rrr|r|}
\lambda^2 & A & & +C & = 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\lambda & -A & +B & & = 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & -B & & = 1 & 0 & -1 & 0 & 1
\end{array}
$$

```
   cr=:%. }:"1  NB. Cramer Method

   a=. 1 0 1 0, _1 1 0 0 ,: 0 _1 0 1  NB.   input a

   cr a
1 0 0 _1
0 1 0 _1
0 0 1  1
```

- $\dfrac{1}{\lambda^2(1-\lambda)} = \dfrac{-1}{\lambda} + \dfrac{-1}{\lambda^2} + \dfrac{1}{\lambda - 1}$
- A B　を通分する
  $\dfrac{-1}{\lambda} + \dfrac{-1}{\lambda^2} = \dfrac{-\lambda - 1}{\lambda^2}$
- 部分分数展開

[*1] 分母である数は素である必要があるとして、次のように構成することもできる。　通分の手間は必要ないが煩瑣である

$\dfrac{1}{\lambda^2(1-\lambda)} = \dfrac{A\lambda + B}{\lambda^2} + \dfrac{C}{\lambda - 1}$

$1 = (A\lambda + B)(\lambda - 1) + C\lambda^2$

$$\frac{1}{\lambda^2(1-\lambda)} = \frac{-\lambda-1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda-1}$$

■Example 6 .

$$\frac{1}{(\lambda-1)^4}$$

- 次のように置く (A はダミー)

$$\frac{1}{(\lambda-1)^4} = \frac{A}{\lambda-1} + \frac{B}{(\lambda-1)^2} + \frac{C}{(\lambda-1)^3} + \frac{D}{(\lambda-1)^4}$$

- 展開する

$$1 = A(\lambda-1)^3 + B(\lambda-1)^2 + C(\lambda-1) + D$$

$$1 = A(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) + B(\lambda^2 - 2\lambda + 1) + C(\lambda - 1) + D$$

- マトリクスフォームに展開し、クラメール法で解く

$$\begin{array}{c|lllll} \lambda^3 & A & & & & = 0 \\ \lambda^2 & -3A & +B & & & = 0 \\ \lambda & 3A & -2B & +C & & = 0 \\ & -A & +B & -C & +D & = 1 \end{array} \qquad \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

- 4 重根の 1 のみ

```
   ] a1=. 1 0 0 0 0,_3 1 0 0 0 ,3 _2 1 0 0,: _1 1 _1 1 1
  1  0  0 0 0
_3   1  0 0 0
  3 _2  1 0 0
_1   1 _1 1 1


    cr a1
1 0 0 0 0
0 1 0 0 0
0 0 1 0 0
0 0 0 1 1
```