

ロレンツ/ロスラー/ロトカ・ヴォルテラ

SHIMURA Masato
jcd02773@nifty.ne.jp

2009年1月22日

目次

1	ロレンツ	1
2	Rössler attracta	3
3	OpenGL	7
4	Reference	7

概要

常微分方程式の数値解法の一つに離散化を行う方法がある。ロレンツモデルの離散化による漸加法にレビューするとともに、ロスラーモデルとロトカ・ボルテラモデルを漸加法で計算し図を描く。OpenGLを用い、ロレンツとロスラーのアトラクタを描画した。

1 ロレンツ

ロレンツの方程式 (1963) を離散化し、漸加法で構成する山下, 西川によるスクリプトが JAPLA で公表されている。^{*1}

```
10 50 8r3&calc_lorenz plot_lorenz init
```

^{*1} 今回パラメーターと初期値を分離するため若干改良した。

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

σ is Prandtl number

ρ is Rayleigh number

$\sigma, \rho, \beta > 0$

usually $\sigma = 10, \beta = 8r3, \rho = 28$

dt=: 0.005 NB. or 0.01

NB.10 50 8r3&calc_lorenz plot_lorenz init

lz=:4 : 0

NB. Lorenz attracta

's r b'=. x NB. parameter

'xx yy zz'=: y NB. initial 5 8 10 or 1 1 1

X=: xx + dt*s*(yy-xx)

Y=: yy + dt*((r*xx)-(yy+xx*zz))

Z=: zz + dt*((xx*yy)-b*zz)

X,Y,Z

)

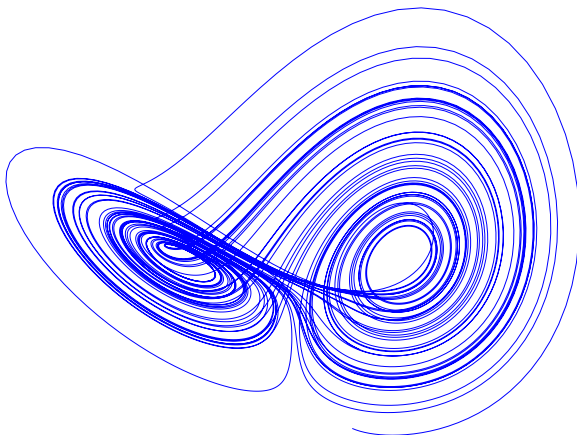


図 1 Lorenz

2 Rössler attracta

Otto Rössler(1940- ,Berlin, biochemist)designed simpler Lorenz like attracta in 1976.

ロレンツアトラクタを単純化したアトラクタはドイツのロスラーが 1976 年に発表した。山下の漸加法のスク립トをロスラー用に改良した。

*2

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= b + (x - c)z\end{aligned}$$

parameter $a = b = 0.2, c = 5.7$ (Rössler)
 $a = b = 0.1, c = 14$ more common

dt=: 0.005

rs=:4 : 0

NB. Rossler attracta

'a b c'=. x NB. 0.2 0.2 14

'xx yy zz'=: y

X=: xx + dt*-(yy+zz)

Y=: yy + dt* xx + a*yy

Z=: zz + dt* (b+ (xx*zz)-c*zz)

X,Y,Z

)

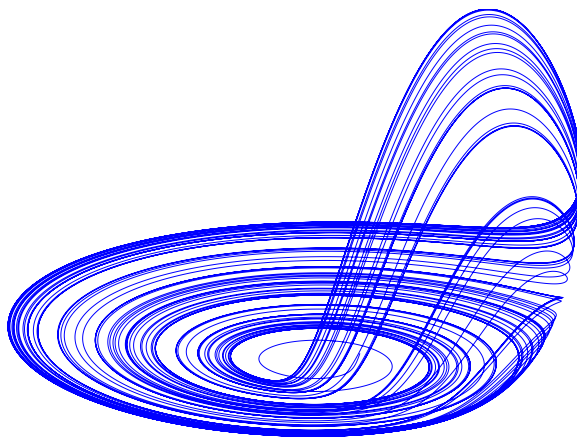


図 2 a,b,c is 0.2 0.2 5.7

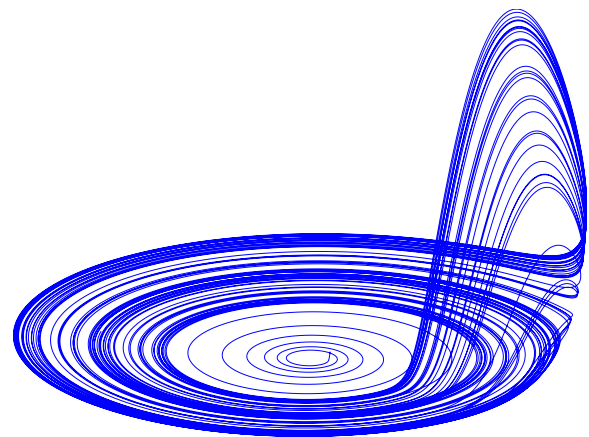


図 3 a,b,c is 0.1 0.1 14

```
0.2 0.2 14&calc_rs plot_lorenz 1 1 1
pd 'eps /temp/rossler0.eps'
```

*2 何種類かあるようだがここに記載したものが有名である。

2.1 Script

```

calc_lorenz=:4 : ' <"1 |: x lz ^:(i.10000) y'
NB. 10 50 8r3&calc_lorenz plot_lorenz init

calc_rossler=:4 : ' <"1 |: x rsr ^:(i.100000) y'
NB. 0.2 0.2 14&calc_rossler plot_lorenz 1 1 1

plot_lorenz=:1 : 0
NB. 10 50 8r3&calc_lorenz plot_lorenz init
pd 'reset'
pd 'noaxes'
pd 'viewpoint 1.6 _2.4 _1.3'
pd u y
pd 'show'
)

```

2.2 ロトカ・ヴォルテラ

Alfred J. Lotka (1880-1949) アメリカ人の両親の下にオーストリー帝国（現ウクライナ）のレムベルク生まれ。少年時代をフランスで過ごし、バーミンガム大学（英国）とライプツヒ大学（ドイツ）で化学、物理を学ぶ。1902年アメリカに渡り、General Chemicalで働く。1920年から4年間フェローシップを得てジョン・ホプキンス大学で研究し、「物理的生物学」を完成させる。メトロポリタン生命に勤務。アメリカ人口学会と統計学会の会長を勤める。

Vito Volterra (1860-1940) イタリアのアンコナの貧しいユダヤ系の生まれ。早くから数学の才を示しピサ大学で、学び23才で教授となる。トリノやローマ大学の教授となり、上院議員も務める。第一次大戦には50才台で従軍しヘリウムを用いた飛行船などの設計に携わる。大戦後生物学の研究を精力的に行った。ムッソリーニへの忠誠を拒否した1%の教授（12人）の一人で全ての公職を追われ海外移り住んだが亡くなる前にローマに戻った。

2種の生物の個体群に関するロトカ・ボルテラモデルで記述される、捕食者と生け贄の遅延を伴う生態モデルである。

第一次大戦でアドリア海が物騒になり漁師も兵役に取られたりで漁が出来なかったため、大戦後魚が増えていると思ったところ捕食者の鮫ばかりが増えていたと言うものである。

$$\frac{dx}{dt} = x - (a - by)x$$

$$\frac{dy}{dt} = y - (c - dx)y$$

```

vtr=: 4 : 0
NB. Lotka-Volterra Model
NB. x is 2r3 1r300 1r2 1r2
'a b c d'=: x
'xx yy'=: y
X=: xx + dt * -xx*(a - b*yy) NB. animy
Y=: yy + dt * yy*(c - d*xx) NB. butterfly
X,.Y
)

dt=: 0.01
PAR=:2r3 1r300 1r2 1r2      NB. parameter enemy a
FST=: 1 100 NB. 10000 1000000 NB. first individual

```

ロトカ・ヴォルテラの式も 2 次ではあるがロレンツとよく似た形をしており、右項には微分記号がない。これを漸加法で計算し plot する。dt=0.01 とする。

Example-1 蝶と天敵とする。

初期値 1 (天敵) 100 (蝶)

天敵の増減 a=2r3 (蝶が居ない場合の一期当たり減少) 依存率が高い

b=1r300 (蝶に合わせて増える天敵の数)

蝶の増減 (c=1r2 (天敵が居ない場合の蝶の増加)

d=1r2 (天敵に補食されて減少する蝶の減少))

*3

```

'key enemy butterfly' plot |: 1 0.01 *"1 PAR vtr ^: (i.8000) FST
pd 'eps /temp/vorterra_2.eps'

```

*3 2r3 is $\frac{2}{3}$

蝶（赤）の個体数は 1/100 で図示している。

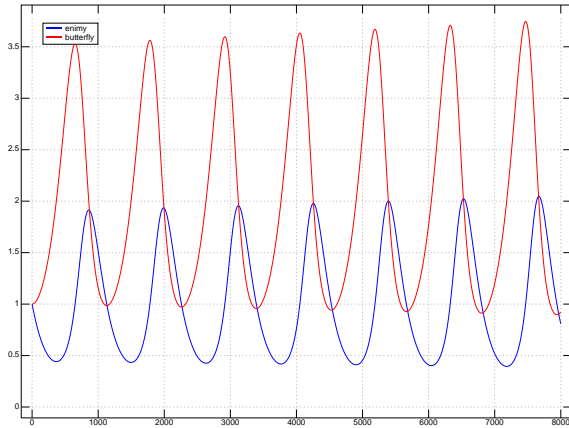


図 4 $x=t$, 蝶（赤）の Y 値は 1/100

$dt=0.01$ で原点 (1,100) から時計回りに進み、概ね $1130t$ で一周する。

```
'key enemy butterfly' plot
{|:1 0.01 *"1 PAR vtr ^:(i.1130)FST
```

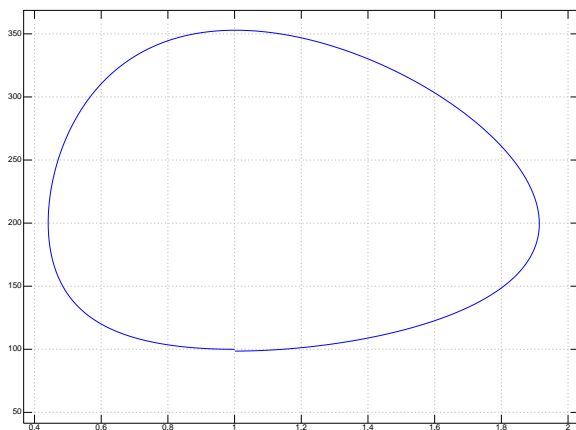


図 5 Lotka-Vortera

$\hat{:}(i.50000)$ での状態。少しずつ外縁が広がってゆく。

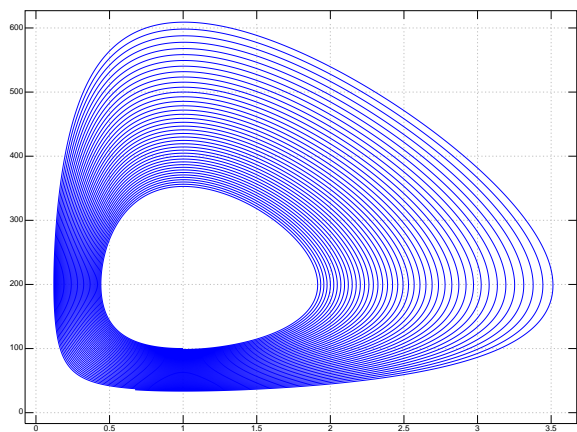


図 6 Lotka-Vortera

3 OpenGL

Oleg Kobchenko が Lorenz の OpenGL 版を作成している。

<http://www.jsoftware.com/jwiki/Essays/Lorenz%20Attractor>

の中の Lorenz Attractor で見られ、ソースコードも公開されている。

Rosler を Oleg のソースコードを少し改良して OpenGL で表示できるようにした。

*4

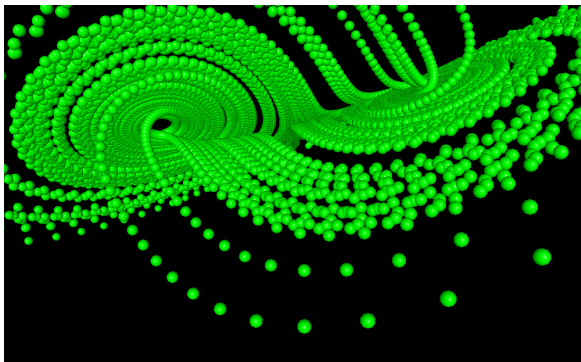


図 7 Lorenz 3d

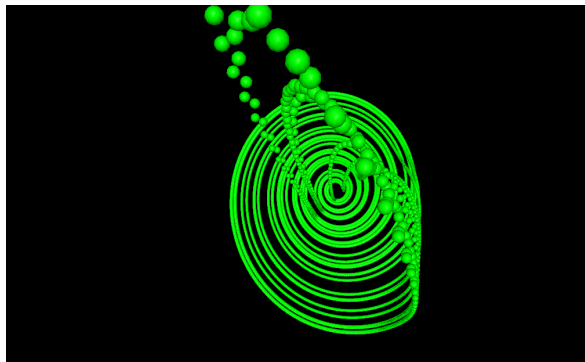


図 8 rossler 3d

4 Reference

Wikipedia [Rössler attracta]

三井/小藤/斉藤 「微分方程式による計算科学入門」共立出版 2004

Script の Download http://homepage3.nifty.com/asagaya_avenue

*4 <http://jsoftware.com/jwiki/Essays> →rosslarattractor