差分グリッドを用いた微分方程式の数値計算 (2) 偏微分方程式（拡散ー楕円型）

SHIMURA Masato
jcd02773@nifty.com

2009 年 12 月 4 日

目次

[*1]

はじめに

頼りにできるのは丁寧にしっかりと数式を書き、計算例を載せた本である。*Bradie* を用いる。この本は *MATLAB* を用いて計算しているがプログラム類は一切載っていないので作成する。
OS も J も 64 ビットで巨大マトリクスを見通しよく扱うことができる時代である。三角対重行列の前処理は一切行わないし、ガウス · ザイデル法の出番もない。

偏微分方程式のタイプ

偏微分方程式は次のようなタイプに分類される。類型に当て嵌まらないものも多くある。
時間と空間を変数に持つ偏微分方程式として、2 変数 x, y の関数 ϕ の 2 階偏微分方程式を想定

[*1] SHIMURA Masato Japan APL Association

する。

$$A\frac{\partial\phi}{\partial x^2}+B\frac{\partial\phi}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial\phi}{\partial y^2}=D$$

$$\begin{aligned}
(B(x,y))^2-4A(x,y)C(x,y) &< 0 &\iff& \quad Ellipic\\
(B(x,y))^2-4A(x,y)C(x,y) &= 0 &\iff& \quad Parabolic\\
(B(x,y))^2-4A(x,y)C(x,y) &> 0 &\iff& \quad Hyperbolic
\end{aligned}$$

楕円 Ellipic	**定常拡散方程式** ポアソン方程式 ラプラス方程式 ヘルムホルツ方程式	Poisson equation $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=f(x,y)$ Laplace equation $f(x,y)=0$ $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$ Helmholtz equation $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\alpha\phi$	2 変数 x,y は空間にとる。方程式の解 ϕ は 2 次元では z 軸方向への値となる。
放物 parabolic	**非定常拡散方程式** 熱伝導 · 拡散方程式	heat equation $\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$	$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$ 2 変数は (t,x) では係数 A,B,C の内 A,B が 0 になっている。α は拡散係数。
双曲 hyperbolic	波動方程式	$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$ $\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$ $\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$	振動 · 波動方程式

[*2]

境界条件

$$
\begin{array}{lll}
Dirichlet & u(x,y) = r(x,y) & on\ \partial R \\
Neumann & \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,y) = r(x,y) & on\ \partial R \\
Robin & \alpha(x,y)u(x,y) + \beta(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial n}(x,y) = r(x,y) & on\ \partial R
\end{array}
$$

ディリクレ境界条件はスーパーストリング理論でも登場するスーパースターである。

1　ポアソン方程式/ディリクレ境界条件の場合

ポアソン方程式

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y^2} = f(x,y)\right]\Bigg|_{xj,yk}$$

左辺をテーラー展開する

$$u(x+h,y) = u(x,y) + \frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x^2}h^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial^3 x^3}h^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial^4 x^4}h^4 + \cdots$$

$$u(x-h,y) = u(x,y) - \frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x^2}h^2 - \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial^3 x^3}h^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial^4 x^4}h^4 - \cdots$$

境界条件

$$u(x,y) = g(x,y) \quad ,(x,y) \in \partial R$$

ディリクレ境界条件の模式図。($5 \times 5 grid$)
偏微分では境界がエッジになる。

[*2] ここでは有限差分法 (FDM) のみで、有限体積法や有限要素法は取り扱わない

$$
\begin{array}{cccccccccc}
y = d//k = M & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\
 & | & & | & & | & & | & & | \\
 & \bullet & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \bullet \\
 & | & & | & & | & & | & & | \\
 & \bullet & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \bullet \\
 & | & & | & & | & & | & & | \\
 & \bullet & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \bullet \\
 & | & & | & & | & & | & & | \\
y = c//k = 0 & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\
 & x = a & & & & & & & & x = b \\
 & j = 0 & & & & & & & & j = N
\end{array}
$$

$\bullet$ = 境界条件で与えられた値

$\circ$ = 求める値

$$\frac{b-a}{N} = \frac{d-c}{M} = h$$

h^2 の項まで取って、2 式を足し合わせて整理する。

2 階中心偏差分による x 方向と y 方向への h による近似で、h^2 の精度で近似できる。

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(xj,yk)} = \frac{u_{j-1,k} - 2u_{j,k} + u_{j+1,k}}{h^2} + O(h^2)$$

y についても同様に。

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{(xj,yk)} = \frac{u_{j,k-1} - 2u_{j,k} + u_{j,k+1}}{h^2} + O(h^2)$$

方程式の形に組む（前の 2 式をポアソン方程式に代入する）

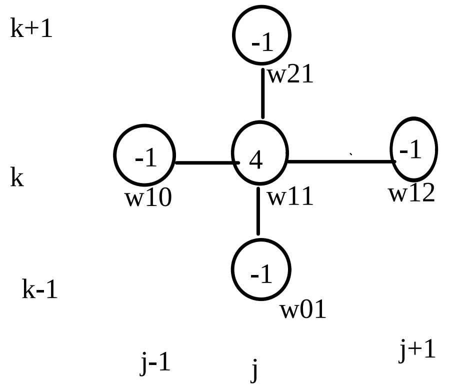
$$\frac{u_{j-1,k} - 2u_{j,k} + u_{j+1,k}}{h^2} + O(h^2) + \frac{u_{j,k-1} - 2u_{j,k} + u_{j,k+1}}{h^2} + O(h^2) = f_{j,k}$$

エラー項を除き、$u_{j,k}$ を $w_{j,k}$ に置き換える

ポアソン方程式の差分の式

$$-w_{j-1,k} - w_{j+1,k} - w_{j,k-1} - w_{j,k+1} + 4w_{j,k} = f_{j,k}$$

5 ポイントの星型オペレーター




```
D0=: 4 _1 0 , _1 4 _1 ,: 0 _1 4
   D0
 4 _1  0
_1  4 _1
 0 _1  4
```

図 1

次のネスティッド · アレーになる。I は単位行列。J では Box を活用する。

$$A = \begin{bmatrix} D & -I & & & & \\ -I & D & -I & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & -I & D & -I \\ & & & & -I & D \end{bmatrix}, with,\ D = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

システム方程式

$$Aw = b$$

ポアソン方程式のディリクレ条件の展開マトリクス型のシステム方程式 ($5 \times 5 grid$)

$4w_{1,1}$	$-w_{2,1}$		$-w_{1,2}$						$= -h^2 f_{1,1} + g_{1.0} + g_{0,1}$
$-w_{1,1}$	$+4w_{2,1}$	$-w_{3,1}$		$-w_{2,2}$					$= -h^2 f_{2,1} + g_{2.0}$
	$-w_{2,1}$	$+4w_{3,1}$			$-w_{3,2}$				$= -h^2 f_{3,1} + g_{3.0} + g_{4,1}$
$-w_{1,1}$			$4w_{1,2}$	$-w_{2,2}$		$-w_{1,3}$			$= -h^2 f_{1,2} + g_{0,2}$
	$-w_{2,1}$		$-w_{1,2}$	$+4w_{2,2}$	$-w_{3,2}$		$-w_{2,3}$		$= -h^2 f_{2,2}$
		$-w_{3,1}$		$-w_{2,2}$	$+4w_{3,2}$			$-w_{3,3}$	$= -h^2 f_{3,2} + g_{4.2}$
			$-w_{1,2}$			$+4w_{1,3}$	$-w_{2,3}$		$= -h^2 f_{1,3} + g_{0,3} + g_{1,4}$
				$-w_{2,2}$		$-w_{1,3}$	$+4w_{2,3}$	$-w_{3,3}$	$= -h^2 f_{2,3} + g_{2,4}$
					$-w_{3,2}$		$-w_{2,3}$	$+4w_{3,3}$	$= -h^2 f_{3,3} + g_{4,3} + g_{3,4}$

1.0.1　EXAMPLE

Bradie Exampple 9.1

formula　最初は 1 段のみのケース

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y^2} = -(2 + \pi^2 x(1 - x))cos(\pi x)$$

$R = ((x, y)|0 < x < 1$
$0 < y < \frac{1}{2}$
.

$$f(x, y) = -(2 + \pi^2 x(1 - x))cos(\pi y)$$

g は区分表示となる (piecewise)

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \\ 0 & , \quad x = 1 \\ x(1 - x) & , \quad y = 0 \\ 0 & , \quad y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

境界条件　.

求める値が一列のプロトタイプ。x の値と x に対応する境界条件の値を与える。$h = \frac{1}{4}$ と x の値は右引数 (y)

$$\begin{array}{ccccccccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ | & & | & & | & & | & & | \\ \bullet & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \bullet \\ | & & | & & | & & | & & | \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array}$$

$\bullet$ = 境界条件で与えられた値
$\circ$ = 求める値

$u(0, y) = u(1, y = 0)$
$u(x, 0) = x(1 - x)$
$u(x, \frac{1}{2}) = 0$

M, N, h　$M = 2$
$N = 4$
$h = \frac{1}{4}$

システム方程式　.

$$\begin{array}{ccccccccc}
4w_{1,1} & -w_{2,1} & & = & -h^2 f_{1,1} & +g_{1,0} & +g_{1,2} & +g_{0,1} \\
-w_{1,1} & +4w_{2,1} & -w_{3,1} & = & -h^2 f_{2,1} & +g_{2,0} & +g_{2,2} & \\
 & -w_{2,1} & +4w_{3,1} & = & -h^2 f_{3,1} & +g_{3,0} & +g_{3,2} & +g_{4,1} \\
 & D & & = & f & \text{下端} & \text{上端} & \text{左右端}
\end{array}$$

f,g **の演算位置**　f は w の位置で演算

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & g_{1,2} & \longrightarrow & g_{2,2} & \longrightarrow & g_{3,2} & & \\
| & & | & & | & & | & & | \\
g_{0,1} & \longrightarrow & f_{1,1} & \longrightarrow & f_{2,1} & \longrightarrow & f_{3,1} & \longrightarrow & g_{4,1} \\
| & & | & & | & & | & & | \\
 & & \mathbf{g_{1,0}} & \longrightarrow & \mathbf{g_{2,0}} & \longrightarrow & \mathbf{g_{3,0}} & &
\end{array}$$

f の計算

$-(2+\pi^2 x(1-x))cos\pi y$

```
   a*1-a=0.25 0.5 0.75
0.1875 0.25 0.1875


(2+ 1p2*  a*1-a)
3.85055 4.4674 3.85055


2 o. 0.25p1
0.707107


-(2+ 1p2*  a*1-a)* 2 o. 0.25p1
_2.72275 _3.15893 _2.72275
```

g の計算 $x(1-x)$

次のボールド体の箇所を計算して与える。

$\mathbf{g_{1,0}}, \mathbf{g_{2,0}}, \mathbf{g_{3,0}}$

他のポイントは 0

```
   a*(1-a=.0.25 0.5 0.75)
0.1875 0.25 0.1875
```

システム方程式のマトリクスフォーム

$$\begin{array}{ccccc}
4 & -1 & 0 & w_{1,1} & 0.351067 \\
-1 & 4 & -1 & w_{2,1} & 0.46809 \\
0 & -1 & 4 & w_{3,1} & 0.351067
\end{array}$$

計算結果 .

- D0 は先に別個に作っておく

```
   D0
 4 _1  0
_1  4 _1
 0 _1  4
```

- Y を計算する

```
   YX
0.357672 0.447433 0.357672
```

- システムの線形計算

```
   (fd0 ; gd0) calc_pdiff0 1r4 ; jx=. 0.25 0.5 0.75
+--------+-----------------+
| 4 _1  0|0.357672 0.134151|
|_1  4 _1|0.447433 0.178934|
| 0 _1  4|0.357672 0.134151|
+--------+-----------------+
  D          wi       ans
```

解

x_j	y_k	$w_{j,k}$
0.25	0.25	0.134151
0.5	0.25	0.178934
0.75	0.25	0.134151

2 ポアソン方程式 · 非ディリクレ境界条件

2.1 非ディリクレ境界条件-下がノイマン

5 星ポイントの左端に未知数を添える。

$$\begin{array}{ccccccccc}
-w_{F1} & +4w_{1,0} & -w_{2,0} & & -w_{1,1} & = & -h^2 f_{1,0} & +g_{0,0} \\
-w_{F2} & -w_{1,0} & +4w_{2,0} & -w_{3,0} & -w_{2,1} & = & -h^2 f_{2,0} & \\
-w_{F3} & & -w_{2,0} & +4w_{3,0} & -w_{3,1} & = & -h^2 f_{3,0} & +g_{4,0}
\end{array}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_1,0)} = \alpha(x_1)$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{w_{1,1}-w_{F1}}{2h} &= \alpha(x_1) \\
\Longrightarrow \quad w_{F1} &= w_{1,1} + 2h\alpha(x_1) \\
w_{F2} &= w_{2,1} + 2h\alpha(x_2) \\
w_{F3} &= w_{3,1} + 2h\alpha(x_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
+4w_{1,0} & -w_{2,0} & & -w_{1,1} & = & -h^2 f_{1,0} & +g_{0,0} + 2h\alpha(x_1) & \\
-w_{1,0} & +4w_{2,0} & -w_{3,0} & -w_{2,1} & = & -h^2 f_{2,0} & & +2h\alpha(x_2) \\
 & -w_{2,0} & +4w_{3,0} & -w_{3,1} & = & -h^2 f_{3,0} & +g_{4,0} & +2h\alpha(x_3)
\end{array}
$$

境界条件

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
k=4 & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\
 & | & & | & & | & & | & & | \\
k=3 & \bullet & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \bullet \\
 & | & & | & & | & & | & & | \\
k=2 & \bullet & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \bullet \\
 & | & & | & & | & & | & & | \\
k=1 & \bullet & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \bullet \\
 & | & & | & & | & & | & & | \\
k=0 & \bullet & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \bullet \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & \otimes & & \otimes & & \otimes & &
\end{array}
$$

$\bullet$ = 境界条件で与えられた値

$\circ$ = 求める値

$\otimes$ = 偽装境界

D は同じ

$$
D = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}
$$

$$
w_{Rj} = \left[w_{1,j}, w_{2,j}, w_{3,j} \right]
$$

$$
Dw_{R0} - Iw_{R1} = \begin{bmatrix} -h^2 f_{1,0} & +g_{0,0} & +2h\alpha(x_1) \\ -h^2 f_{2,0} & & +2h\alpha(x_2) \\ -h^2 f_{3,0} & +g_{4,0} & +2h\alpha(x_3) \end{bmatrix} = b_{R0}
$$

$$
-Iw_{R0} + Dw_{R1} - Iw_{R2} = \begin{bmatrix} -h^2 f_{1,1} & +g_{0,1} & \\ -h^2 f_{2,1} & & \\ -h^2 f_{3,1} & +g_{4,1} & \end{bmatrix} = b_{R1}
$$

$$-Iw_{R1} + Dw_{R2} - Iw_{R3} = \begin{bmatrix} -h^2 f_{1,2} & +g_{0,2} \\ -h^2 f_{2,2} & \\ -h^2 f_{3,2} & +g_{4,2} \end{bmatrix} = b_{R2}$$

$$-Iw_{R2} + Dw_{R3} = \begin{bmatrix} -h^2 f_{1,3} & +g_{0,3} & +g_{1,4} \\ -h^2 f_{2,3} & +g_{2,4} & \\ -h^2 f_{3,3} & +g_{4,3} & g_{3,4} \end{bmatrix} = b_{R3}$$

最終的な線形のシステム方程式

$$\begin{bmatrix} D & -2I & & \\ -I & D & -I & \\ & -I & D & -I \\ & & -I & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{R0} \\ w_{R1} \\ w_{R2} \\ w_{R3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{R0} \\ b_{R1} \\ b_{R2} \\ b_{R3} \end{bmatrix}$$

2.1.1　EXAMPLE, **ポアソン方程式**

Bradei Example 9.2

formula　Example1 と同じ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y^2} = -(2 + \pi^2 x(1-x))cos(\pi x)$$

.

$$\begin{aligned} f(x,y) = -(2 + \pi^2 x(1-x))cos(\pi y) \\ g(x,y) = 0 \\ \alpha(x) = 0 \end{aligned}$$

境界条件

$$\begin{aligned} u(0,y) = u(1,y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,0) = 0 \\ u(x,\frac{1}{2}) = 0 \end{aligned}$$

下の境界はノイマン条件

境界条件の模式　2 列の値を求める

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
k=2 & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\
 & | & & | & & | & & | & & | \\
k=1 & \bullet & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \bullet \\
 & | & & | & & | & & | & & | \\
k=0 & \bullet & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \bullet \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & \otimes & & \otimes & & \otimes & &
\end{array}
$$

$\bullet$ = 境界条件で与えられた値

$\circ$ = 求める値

$\otimes$ = 偽装境界

g の値は全て 0

f,g の演算位置　f は w の位置で演算,g は全て 0

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & & \\
| & & & & & & & & | \\
\bullet & \longrightarrow & w_{1,1} & \longrightarrow & w_{2,1} & \longrightarrow & w_{3,1} & \longrightarrow & \bullet \\
| & & & & & & & & | \\
 & & w_{1,0} & \longrightarrow & w_{2,0} & \longrightarrow & w_{3,0} & &
\end{array}
$$

D の構成　ネスティッドアレーを利用する。J では BOX で構成する。

- ネストは正方行列になる。
- 構成要素は全て同じサイズの正方行列
- サイズは k で決まる

$$
\begin{array}{cccc}
D & -2I & & \\
-I & D & -I & \\
 & -I & D & -I \\
 & & -I & D
\end{array}
$$

```
 (D0,. _2* =/~i.3),(_1*=/~i.3),.D0
 4 _1  0 _2  0  0
_1  4 _1  0 _2  0
 0 _1  4  0  0 _2
_1  0  0  4 _1  0
 0 _1  0 _1  4 _1
 0  0 _1  0 _1  4
```

4	−1	0	−2	0	0	$w_{1,0}$	0.240659
−1	4	−1	0	−2	0	$w_{2,0}$	0.279213
0	−1	4	0	0	−2	$x_{3,0}$	0.240659
−1	0	0	4	−1	0	$w_{1,1}$	0.170172
0	−1	0	−1	4	−1	$w_{2,1}$	0.197433
0	0	−1	0	−1	4	$w_{3,1}$	0.170172

```
   fdxy0 calc_pdiff1 1r4;jx;kx
+-----------------+-----------------+
| 4 _1  0 _2  0  0|0.240659 0.192371|
|_1  4 _1  0 _2  0|0.279213 0.256771|
| 0 _1  4  0  0 _2|0.240659 0.192371|
|_1  0  0  4 _1  0|0.170172 0.136027|
| 0 _1  0 _1  4 _1|0.197433 0.181564|
| 0  0 _1  0 _1  4|0.170172 0.136027|
+-----------------+-----------------+
     D               wi       ans
```

解

x_j	y_k	$w_{i,k}$
0.25	0	0.192371
0.5	0	0.256771
0.75	0	0.192371
0.25	0.25	0.136027
0.5	0.25	0.181564
0.75	0.25	0.136027

2.1.2 Script

```
jx=: 0.25 0.5 0.75
kx=: 0 0.25
fd0=: 3 : '-(2 + 1p2* y*1-y)*/ 2 o. 1p1* {.y'
gd0=: 3 : 'y * 1-y'

fdxy0=: 4 : '-(2 + 1p2* y*1-y)*/ 2 o. 1p1* x'
NB. (1r4^2)* 2+ 1p2* jx*1-jx

NB. Bradie Example 9.1
calc_pdiff0=: 1 : 0
NB. Usage: (fd0;gd0) calc_pdif0 (1r4;jx)
```

```
'H0 J0 '=: y
fg=: u L:0 J0 NB. fx gx
TMP=.  ;("1) ,. fg  NB. open box
YX=:({: TMP)+(-^&2 H0)*{. TMP  NB. make y
D0;YX,.YX %. D0
)

NB. Bradie example 9.2
calc_pdiff1=: 1 : 0
'H0 J0 K0'=: y
fg=: K0 u L:0 J0
YD=:;|:(- ^&2 H0)* fg
DX=. (D0,. _2* =/~i.3),(_1*=/~i.3),.D0
DX;YD,.YD %. DX
)
```

2.2　非ディリクレ境界条件-上がロビン、横がノイマン

5 星ポイントに未知数を添える。

$$
\begin{array}{cccccccccc}
4w_{1,1} & -w_{2,1} & & & -w_{1,2} & & = & -h^2 f_{1,1} & +g_{1,0} & +g_{0,1} \\
-w_{1,1} & +4w_{2,1} & -w_{3,1} & & -w_{2,2} & & = & -h^2 f_{2,1} & +g_{2,0} & \\
 & -w_{2,1} & +4w_{3,1} & -w_{4,1} & -w_{3,2} & & = & -h^2 f_{3,1} & +g_{3,0} & \\
 & & -w_{3,1} & +4w_{4,1} & -w_{4,2} & -w_{F1} & = & -h^2 f_{4,1} & +g_{4,0} &
\end{array}
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(y)
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha(y)
$$

$$
w_{F,1} = w_{3,1} + +2h\alpha(y_1)
$$

境界条件

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & \otimes & & \otimes & & \otimes & & \otimes & \\
k=4 & \bullet & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \otimes \\
 & | & & | & & | & & | & & | & \\
k=3 & \bullet & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \otimes \\
 & | & & | & & | & & | & & | & \\
k=2 & \bullet & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \otimes \\
 & | & & | & & | & & | & & | & \\
k=1 & \bullet & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \otimes \\
 & | & & | & & | & & | & & | & \\
k=0 & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet &
\end{array}
$$

$\bullet$ = 境界条件で与えられた値

$\circ$ = 求める値

$\otimes$ = 偽装境界

D は 1 サイズ大きくなる

$$
D^{'} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \\ & -1 & 4 & -1 & \\ & & -2 & 4 & \end{bmatrix}
$$

$$
D^{'} w_{R1} - I w_{R2} = \begin{bmatrix} -h^2 f_{1,1} & +g_{1,0} & +g_{0,1} \\ -h^2 f_{2,1} & g_{2,0} & \\ -h^2 f_{3,1} & g_{3,0} & \\ -h^2 f_{4,1} & +g_{4,0} & +2h\alpha(y_1) \end{bmatrix} = b_{R1}
$$

$$
-I w_{R1} + D^{'} w_{R2} - I w_{R3} = \begin{bmatrix} -h^2 f_{1,2} & +g_{0,2} & \\ -h^2 f_{2,2} & & \\ -h^2 f_{3,2} & & \\ -h^2 f_{4,2} & & +2h\alpha(y_2) \end{bmatrix} = b_{R2}
$$

$$
-I w_{R2} + D^{'} w_{R3} - I w_{R4} = \begin{bmatrix} -h^2 f_{1,3} & +g_{0,3} & \\ -h^2 f_{2,3} & & \\ -h^2 f_{3,3} & & \\ -h^2 f_{4,3} & & +2h\alpha(y_3) \end{bmatrix} = b_{R3}
$$

$$
-I w_{R3} + D^{'} w_{R4} - I w_{RF} = \begin{bmatrix} -h^2 f_{1,4} & +g_{0,4} & \\ -h^2 f_{2,4} & & \\ -h^2 f_{3,4} & & \\ -h^2 f_{4,4} & & +2h\alpha(y_4) \end{bmatrix}
$$

$$p(x)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x)u = r(x)$$

$$w_{F5} = w_{1,3} - \frac{2hq(x_1)}{p(x_1)}w_{1,4} + \frac{2hr(x_1)}{p(x_1)}$$

$$-2Iw_{R3} + D''w_{R4} = \begin{bmatrix} -h^2 f_{1,4} & +g_{0,4} & & +\frac{2hr(x_1)}{p(x_1)} \\ -h^2 f_{2,4} & & & +\frac{2hr(x_2)}{p(x_2)} \\ -h^2 f_{3,4} & & & +\frac{2hr(x_3)}{p(x_3)} \\ -h^2 f_{4,4} & & +2h\alpha(y_4) & +\frac{2hr(x_4)}{p(x_4)} \end{bmatrix} = b_{R4}$$

最終的な線形のシステム方程式

$$\begin{bmatrix} D' & -I & & \\ -I & D' & -I & \\ & -I & D' & -I \\ & & -2I & D'' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_{R1} \\ w_{R2} \\ w_{R3} \\ w_{R4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{R1} \\ b_{R2} \\ b_{R3} \\ b_{R4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} D' & -I & & \\ -I & D' & -I & \\ & -I & D & -I \\ & & -2I & D'' \end{matrix}$$

$$D' = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D'' = \begin{bmatrix} 4 + 2h\frac{q(x_1)}{p(x_1)} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 + 2h\frac{q(x_2)}{p(x_2)} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 + 2h\frac{q(x_3)}{p(x_3)} & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 + 2h\frac{q(x_4)}{p(x_4)} \end{bmatrix}$$

2.2.1 Example

Bradie Example 9.3

$$
\begin{array}{ccc}
\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 & , 0 < x < 1/2 & , 0 < y < 1 \\
T(0, y) = T(x, 0) = 500 & \dfrac{\partial T}{\partial x}\left(\dfrac{1}{2}, y\right) = 0 & \dfrac{\partial T}{\partial y}(x, 1) + 10T(x, 1) = 3000
\end{array}
$$

境界条件の図

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & \otimes F5 & & \otimes F6 & & \\
k = 4 & \bullet & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \otimes & F4 \\
 & | & & | & & | & & \\
k = 3 & \bullet & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \otimes & F3 \\
 & | & & | & & | & & \\
k = 2 & \bullet & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \otimes & F2 \\
 & | & & | & & | & & \\
k = 1 & \bullet & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \otimes & F1 \\
 & | & & | & & | & & \\
k = 0 & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & & \\
j = 0 & & j = 1 & & j = 2 & & &
\end{array}
$$

$\bullet$ = 境界条件で与えられた値

$\circ$ = 求める値

$\otimes$ = 偽装境界

境界条件をモデルに会わせ整理する。

$$
\begin{array}{lll}
f(x, y = 0 & g(x, y) = 500 & \\
\alpha(y) = 0 & & \\
p(x) = 1 & q(x) = 10 & r(x) = 3000 \\
h = 1/4 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & \otimes F5 & & \otimes F6 & & \\
b_{R4} & k=4 & g04 & \longrightarrow & w14 & \longrightarrow & w24 & \otimes & F4 \\
 & & | & & | & & | & & \\
b_{R3} & k=3 & g03 & \longrightarrow & w13 & \longrightarrow & w23 & \otimes & F3 \\
 & & | & & | & & | & & \\
b_{R2} & k=2 & g02 & \longrightarrow & w12 & \longrightarrow & w22 & \otimes & F2 \\
 & & | & & | & & | & & \\
b_{R1} & k=1 & g01 & \longrightarrow & w11 & \longrightarrow & w11 & \otimes & F1 \\
 & & | & & | & & | & & \\
 & k=0 & g00 & \longrightarrow & g10 & \longrightarrow & g20 & & \\
 & j=0 & & j=1 & & j=2 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
g(x.y) &= all\ 500 \\
f(x,y) &= 0 \\
\alpha &= 0
\end{aligned}
$$

b_{Rn} を計算する

$$
b_{R1} = \begin{bmatrix} -h^2 f_{1,1} & +g_{1,0} & +g_{0,1} \\ -h^2 f_{2,1} & g_{2,0} & \\ -h^2 f_{3,1} & g_{3,0} & \\ -h^2 f_{4,1} & +g_{4,0} & +2h\alpha(y_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +500 & +500 \\ 0 & +500 & +0 \end{bmatrix}
$$

$$
b_{R2} = \begin{bmatrix} -h^2 f_{1,2} & +g_{0,2} & \\ -h^2 f_{2,2} & & \\ -h^2 f_{3,2} & & \\ -h^2 f_{4,2} & & +2h\alpha(y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +500 \\ 0 & +0 \end{bmatrix}
$$

$$
b_{R3} = \begin{bmatrix} -h^2 f_{1,3} & +g_{0,3} & \\ -h^2 f_{2,3} & & \\ -h^2 f_{3,3} & & \\ -h^2 f_{4,3} & & +2h\alpha(y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +500 \\ 0 & +0 \end{bmatrix}
$$

$$
b_{R4} = \begin{bmatrix} -h^2 f_{1,4} & +g_{0,4} & & +\frac{2hr(x_1)}{p(x_1)} \\ -h^2 f_{4,4} & & +2h\alpha(y_4) & +\frac{2hr(x_4)}{p(x_4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +500 & +2(0.25)(3000)/1 \\ 0 & +0 & +2(0.25)(3000)/1 \end{bmatrix}
$$

D'' を計算する

$$
D'' = \begin{bmatrix} 4+2h\dfrac{q(x_1)}{p(x_1)} & -1 \\ -2 & 4+2h\dfrac{q(x_4)}{p(x_4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2(0.25)(10)/1 & -1 \\ -2 & 4+2(0.25)(10)/1 \end{bmatrix}
$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 4 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 9 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ \hline w_{1,2} \\ w_{2,2} \\ \hline w_{1,3} \\ w_{2,3} \\ \hline w_{1,4} \\ w_{2,4} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1000 \\ 500 \\ \hline 500 \\ 0 \\ \hline 500 \\ 0 \\ \hline 2000 \\ 1500 \end{array}\right]$$

2.2.2　script **の解説**

```
   mk_d_dash1 4
 4 _1  0  0
_1  4 _1  0
 0 _1  4 _1
 0  0 _2  4

mk_d_dash1=: 3 : 0
NB. Usage:  mk_d_dash1 4
SIZE=. y
TMP0=.;("1),.(SIZE-2)#<_1 4 _1 NB. make bogy
TMP1=.TMP0,. ((# TMP0),(SIZE - {:$ TMP0)) $ 0 NB. add 0 column
TMP2=. (-i. # TMP1) |."0 1  TMP1 NB. rotate with rank 0 1
|."1 (|.("1)4 _1 , TMP2),4 _2    NB. add top and last raw
)

   4 2 mk_mat_a 0.25 1 10
+-----+-----+-----+-----+
| 4 _1|_1  0|0 0  |0 0  |
|_2  4| 0 _1|0 0  |0 0  |
+-----+-----+-----+-----+
|_1  0| 4 _1|_1  0|0 0  |
| 0 _1|_2  4| 0 _1|0 0  |
+-----+-----+-----+-----+
|0 0  |_1  0| 4 _1|_1  0|
|0 0  | 0 _1|_2  4| 0 _1|
+-----+-----+-----+-----+
|0 0  |0 0  |_2  0| 9 _1|
|0 0  |0 0  | 0 _2|_2  9|
+-----+-----+-----+-----+
```

Open Box （ほどくのに一苦労)

```
 ,./ ,./> a
```

```
|. 4 2 $ 1000 500 500 0 500 0 2000 1500 %.  ,./ ,./ >a
```

unit	*is*	*K*
	$w_{1,y}$	$w_{2,y}$
4	356.995	339.052
3	436.95	418.739
2	472.065	462.006
1	489.305	485.154

```
   4 2 calc_pdiff_elli_L 0.25 0 500 0 1 10 3000
356.995 339.052
 436.95 418.739
472.065 462.006
489.305 485.154
```

2.2.3 Script

```
NB. --Bradie--Example 9.3-------------------------------
NB. Ellipic /Newman Robin boundary condition

calc_pdiff_elli_L=: 4 : 0
NB. 4 2 calc_pdiff_elli_L 0.25 0 500 0 1 10 3000
NB. condition Newman/Robin left bottom
NB. 4 2 u h f g alpha p q r
'HX FX GX ALPHA PX QX RX'=: y
MAT=: ,./,./ > x mk_mat_a_sub0 HX,PX,QX NB. opened
BR=: ; x mk_br_sub0 y
|. x $ BR %. MAT
)


mk_d_dash1_sub1=: 3 : 0
NB. D'
NB. Usage:  mk_d_dash1 4 (SIZEC)
SIZE=. y
TMP0=.;("1),.(SIZE-2)#<_1 4 _1 NB. make body
```

```
TMP1=.TMP0,. ((# TMP0),(SIZE - {:$ TMP0)) $ 0 NB. add 0 column
TMP2=. (-i. # TMP1) |."0 1  TMP1 NB. rotate with rank 0 1
|."1 (|.("1)4 _1 , TMP2),4 _2    NB. add top and last raw
)


mk_d_dash2_sub1=: 4 : 0
NB. D''
NB. Usage:  3 mk_d_dash2 0.25 1 10
NB. x is SIZE C
SIZE=. x
'HX PX QX'=. y
TMP01=. 4++:HX*QX%PX   NB. born
if. 2=SIZE do. TMP3=. (TMP01,_1),: _2,TMP01
else.
TMP0=.;("1) ,.(SIZE-2)# <_1 ,TMP01,_1 NB. expand to n raw
TMP1=.TMP0,. ((# TMP0),(SIZE - 3)) $ 0 NB. add 0 column
TMP2=. (-i. # TMP1) |."0 1  TMP1 NB. rotate with rank 0 1
TMP3=.|."1 (|.("1) (TMP01, _1) , TMP2),TMP01, _2    NB. add top and last raw
end.
)

mk_mat_a_sub0=: 4 : 0
NB. size is kn -1 // is  unknown raw
'SIZER SIZEC'=. x NB. raw column
NB. 'HX PX QX'=. y
MAT0=: < (SIZEC,SIZEC)$0  NB. all null
TMP01=:(_1*=/~i. SIZEC ); (mk_d_dash1_sub1 SIZEC);_1*=/~i. SIZEC
TMP0=:;("1),.(SIZER -2)# <TMP01 NB. body
TMP1=:(- i.# TMP0)|.("0 1) TMP0,.(;(# TMP0),(SIZER- 3))$ MAT0 NB. add 0 and twist  $ MAT0
TMP20=.(}. TMP01), TMP21=.(SIZER- 2 )# MAT0 NB. top raw
TMP22=.(_2*=/~i. SIZEC); SIZEC mk_d_dash2_sub1 y NB. body of last law
TMP20,TMP1,(TMP21,TMP22)
)


mk_br_sub0=: 4 : 0
```

```
NB. Usage:  4 2 mk_br_sub0 0.25 0 500 0 1 10 3000
'HX FX GX ALPHA PX QX RX'=: y
'SIZER SIZEC'=: x
GXR=: (>: SIZER) # GX
GXC=: (>: SIZEC) # GX
HX2=: ^&2 - HX
ANS=. <''
for_ctr. i. SIZER-2 do.
BR_CENTER0=:+/"1 (HX2*FX),.(ctr{ }. GXR),((SIZEC-2)#0),(+: HX)*ALPHA
ANS=. ANS,<BR_CENTER0
end.
NB. top is bottom of matrix
BT_TOP=: <+/"1(HX2*FX),.((+: HX)*RX%PX),.({. GXR),((SIZEC-2)#0),(+: HX)*ALPHA
NB. bottom is top of matrix
BT_BOTTOM=: <+/"1 (HX2*FX),.(}. GXC),.(({: GXR),(SIZEC-2)#0),(+: HX)*ALPHA
BT_BOTTOM,(}. ANS),BT_TOP
)
```

3 References

Brain Bradie [A friendly Introduction to Numerical Anaysis] Pearson Education 2006

付録 A Free Download

J http://www.jsoftware.com

Script http://homepage3.nifty.com/asagaya_avenue