JAPLA 研究会資料 2009/5/30

Ｊ言語からの群論の理解
－哲学として、ツールとして－

西川　利男

０．はじめに

先月、中野嘉弘氏より興味そそられる論文「群論演習とＪ（その１）YaHoo 知恵袋の問答から」が寄せられた。私にとって群論は東京、初台の東京工業試験所に勤務していた頃、夏の集中輪講としてA. Cotton,"Chemical Application of Group Theory"なる書をやった。今、読んでも良い本で、分子構造、電子状態の量子化学への大変な武器があるものだと、若さゆえの情熱を注いだ。しかし、当時、はやっていたマージナウ・マーフィーの「物理と化学のための数学」共立全書のⅡ巻に群論の章があり、これも輪講をやったが、こっちはずっと数学寄りでまったく歯が立たなかった。また、あらためて群論の数学をひっぱりだしてみたが、やはり難物だ。同時に数学の本は、（とくに導入部で）どうしてこんな説明のしかたしかないのかと思う。

今の私にとってのアドバンテージはＪ言語という助っ人がある。このＪの考え方＝哲学および強力なツールを手に、私なりに群論を理解してみたいと思う。

１．Ｊの哲学と群論

Ｊ言語の基本は次の哲学である。

値、データ＝名詞
処理、操作＝動詞

一方、群論でも同じ考え方があてはまる。

群論で対象とする集合は、名詞である。
群論の群の要素は処理、操作であり、これは動詞である。

Ｊ言語は、動詞を引数として処理することが出来る他の言語にない特徴を持っている。群論も同じ考え方で、処理、操作という動詞の集まりを扱う数学である。

ちなみに、遠山啓著「無限と連続」岩波新書の第２章「もの」と「はたらき」では、群論の入り口を解説しているが、もちろん群は「はたらき」としている。

群論の群、その要素である元(element)は、動詞で共通であるが、対象とする名詞はさまざまである。つまり対象はいろいろなものにわたっている。また、このことによって、群論がいかに広範囲の適用分野で役に立っているかを示している。

・文字の集まり
・図形（平面、立体）の線や角
・数値（整数、実数、複素数）の集まり
・方程式や関数など数式
　…歴史的には群論は一般の５次方程式が解けないことを示すための道具として、アーベル、ガロアにより始められた。
・分子などの状態を表す量子力学的波動関数
・いろいろな結晶構造
… …

２．紙とエンピツの群論

２種類の異なる対象(＝名詞)について、それぞれに合った操作(＝動詞)を行なう。

２．１　３つの文字の置換（置き換え）

A, B, Ｃの３つの文字をいろいろ置き換える。

o：そのまま

ABC

$$\begin{pmatrix} 0\,1\,2 \\ 0\,1\,2 \end{pmatrix}$$

a：中と後ろとを置き換える

ACB

$$\begin{pmatrix} 0\,1\,2 \\ 0\,2\,1 \end{pmatrix}$$

b：前と中とを置き換える

BAC

$$\begin{pmatrix} 0\,1\,2 \\ 1\,0\,2 \end{pmatrix}$$

c：前と中とを、中と後ろとを置き換える

BCA

$$\begin{pmatrix} 0\,1\,2 \\ 1\,2\,0 \end{pmatrix}$$

d：前と後ろとを、中と前とを、後ろと中とを置き換える

CAB

$$\begin{pmatrix} 0\,1\,2 \\ 2\,0\,1 \end{pmatrix}$$

e：前と後ろとを、後ろと前とを置き換える

CBA

$$\begin{pmatrix} 0\,1\,2 \\ 2\,1\,0 \end{pmatrix}$$

置換という操作は動詞であり、群論では元(element)という。これは小文字で示した。なにもしない元は単位元と呼ばれ、数学の本では、ｅやｉで示されることが多いが、ここではあえてｏとした。この方が、Ｊとのプリミティブと混同せず、0と似ていて便利である。一方、対象となる文字は名詞であり、大文字を使い区別した。

これはまだ群かどうか、確かめていないが仮りに次のように記す。

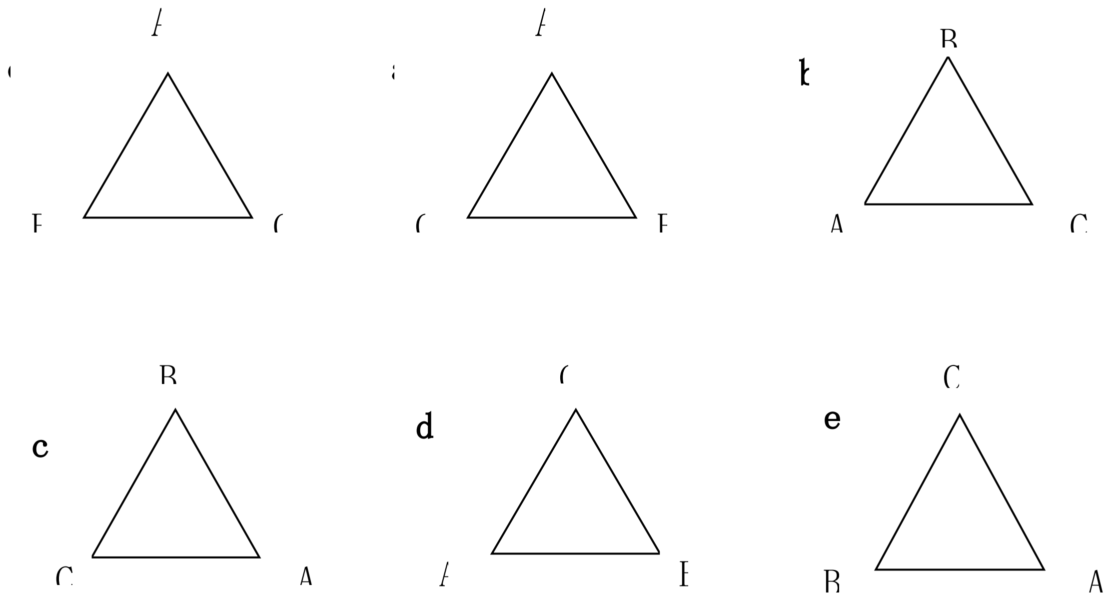
S_3 ＝ {o, a, b, c, d, e}

すなわち、置換という操作の集まりが群である。そして３次の置換群または対称群と呼ばれる。（対称群という語がよく使われるが、これはあいまいすぎて私は好まない。）元の数は位数(order)で、この例では６である。

置換を表すカッコの記法は、群論で一般に使われコーシーの記法と呼ばれる。数学のコーシー記法は１オリジンだが、ここではＪとの関連から０オリジンで用いた。また個々の操作は群の元(element)という。

２．２　正三角形をその位置で回転、鏡映する

o：そのまま
a：鏡映（たてに置いた鏡に映す）
b：右に回転した後、鏡映
c：右に回転
d：左に回転
e：左に回転した後、鏡映



上の２つの例から分かるように、「文字の置き換え」と「正三角形の回転、鏡映」という操作は全く異なるが、６つの種類の共通したやり方で行なわれる。

　このような操作の集まりを抽象して扱うのが群論であり、これは同型(Isomorphism)と言われる。

３．Ｊを使っての群論

　対象が３つ位の問題であれば、紙とエンピツでも出来るが、もっと大きくなったら出来るものではない。計算によることが必要になる。Ｊにはそのための強力なプリミティブが備えられれている。

　C. 置換(permute)が、それで私はCauchy記法のC.であると解している。つまり、先のコーシー記法のカッコの２行目を左引数とすれば、文字の置換が得られる。

例えば

```
    0 1 2 C. 'ABC'
ABC
    0 2 1 C. ‘ABC’
ACB
    1 0 2 C. ‘ABC’
BAC
```

また、３つの値０ １ ２のすべての場合を列挙するものとして、A. アナグラム(anagram)がある。
これを使うと、群の元は次のように決められる。これらを置換ベクトルと呼ぶこともある。

```
   'o a b c d e' =: (i.6) A. (i.3)
   o
0 1 2
   a
0 2 1
   b
1 0 2
   c
1 2 0
   d
2 0 1
   e
2 1 0
```

先の操作は次のようになる。

```
   o C. 'ABC'
ABC
   a C. 'ABC'
ACB
   b C. 'ABC'
BAC
```

４．行列演算による群論

行列演算を用いれば、例えば置換ベクトルのｏからａへの変換は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,0\,1 \\ 0\,1\,0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

この方式は表現(representation)と呼ばれるが、演算＝動詞という意味が強調される。しかし、ＪでC.を使った方がずっと便利である。

５．群の繰り返し操作と群表の作成

ＪのC.を使って、群の中のいろいろな元を繰り返し操作することをやってみる。
例えば

```
   b C. (a C. 'ABC')
CAB
```

これは、次のようにすることと同じである。

```
   (b C. a) C. 'ABC'
CAB
```

そこで

```
   b C. a
2 0 1
```

であることから

```
   d -: b C. a
1
```

これを、普通の数学の書き方にしたがえば

```
   d = b C. a
```

である。

別の例でやってみる。

```
   c C. (a C. 'ABC')
CBA
   c C. a
2 1 0
   e -: c C. a
1
```

つまり

```
   e = c C. a
```

これらの実験から分かることは、文字という対象（＝名詞）をわざわざ使わなくても、元（＝動詞）だけの演算から、元の繰り返し演算がどうなるか、がわかる。

これを、すべての元に対して行なった一覧表をつくることが出来る。これが群の乗積表、簡単に群表といわれるものである。

Ｊでは次のようなプログラムで簡単にできる。

```
   T =. (o; a; b; c; d; e) (C. L:0)"(0 1)  (o; a; b; c; d; e)
   T0 =. 0{T
   TABLE =. (T0 i. T) {<"(0)'oabcde'
   TT =: <"(0)'oabcde'
   ((<' '), TT) , (,. TT),"(1) TABLE
+-+-+-+-+-+-+-+
| |o|a|b|c|d|e|
+-+-+-+-+-+-+-+
|o|o|a|b|c|d|e|
+-+-+-+-+-+-+-+
|a|a|o|c|b|e|d|
+-+-+-+-+-+-+-+
|b|b|d|o|e|a|c|
+-+-+-+-+-+-+-+
|c|c|e|a|d|o|b|
+-+-+-+-+-+-+-+
|d|d|b|e|o|c|a|
+-+-+-+-+-+-+-+
|e|e|c|d|a|b|o|
+-+-+-+-+-+-+-+
```

この表からたとえば、ｂとａとの繰り返し操作はｄ、ｃとａとの繰り返し操作はｅということがわかる。

ここで注意しなくてはならないことは、普通の数学の演算順序との違いである。

Ｊでは

$b \circ a$

は先にａを作用させ、次にｂを作用させる。

ところが、普通の数学では、先にｂ を作用させ、次にａを作用させる、という順序をとる。そのため、数学の群論の群表とは異なるかもしれない。行と列の項目の取り方についても注意しなければならない。

６．群とは何かー群の成立条件

ここで、あらためて「群とは何か」を定義しよう。以下の４つの条件が満たされたとき、「群をなす」という。

① 任意の２つの元ａ，ｂに対して、乗法あるいは積に対応する繰り返し演算が可能であり、その結果が群の元に含まれる。

② ３つの元ａ，ｂ，ｃに対して次の結合則が成り立つ。

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

③ 単位元と呼ばれる元ｏがあって、すべての元に対して次の関係が成り立つ。

$$o \circ a = a \circ o = o$$

④ すべての元ａに対して、逆元a^{-1}が存在して、次の関係が成り立つ。

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = o$$

これらは、先の群表を使って容易に確かめられる。そして

$$S_3 = \{o, a, b, c, d, e\}$$

なる３次の置換群をなす、と言える。

７．おわりに

本稿は群論としては、ほんの入り口だけで、私の感想を述べたにすぎない。
その他、交代群、巡回群など構造の違う群もある。Ｊ言語はこれらについても
便利なツールである。例えばC.は置換ベクトルを巡回ベクトルに変換してくれる。

```
    C. 1 2 3 0 4
+-------+-+
|3 0 1 2|4|
+-------+-+
```

数値を扱った群論、たとえば「整数は加法に関して、加法群をつくる」といった言い方は群論の考え方を非常に混乱させるので、あえて話題にしなかった。

群論のいろいろな話題をとりあげることは、代数学が共通の構造の上に構築されているという点で数学者にとっては興味あることかもしれないが、かえって群論の基本の考え方を見失うことになるのではないだろうか。

その意味では、化学者のための群論はメタン、エタンなど鎖状炭化水素から、ベンゼンなど亀の子状の芳香族炭化水素など具体的な分子の対称性などを操作することでずっと取り付きやすく、私にとっては良く理解できた。

最後に、群論は数学の道具である以上に哲学であると思う。

付記

５月３０日のJAPLA研究会での発表時に、鈴木義一郎氏より、置換群S_3の元の順序について、偶置換、奇置換さらには部分群との関連性より元に順序の入れ換えと呼び名の変更を行なったらどうか、との助言をいただいた。その後、持ち帰り考慮したが、ＪのプリイティブA.(anagram)を使って自動的に生成される順序であることから、あえてこのままにすることにした。

置換と互換との関係、部分群などのテーマについてはあらためて検討したいと考えている。