ニュートン法の周辺

SHIMURA Masato
JCD02773@nifty.ne.jp

2009 年 6 月 24 日

目次

はじめに

IBM のバッカス達が FORTRAN を開発した時に科学技術計算用に浮動小数点を組み込むことに苦心した。
最近の数値計算言語は更に進化し、実数を少数でなく分数で計算し、最後に浮動小数点や小数で表示するものが多くなり、従来曖昧にされてきた数学や数値計算の細部が確認が出きるようになり、信頼性も増した。ここではニュートンの遺した数値計算を検討してみよう。

1 ニュートン法

ニュートンは今日ニュートン法またはニュートン · ラフソン法と呼ばれる非線形方程式の解法がある。

ニュートンは唯一つ次の式の解法のメモを残した。

$y^3 - 2y - 5 = 0$

ニュートンは第 4 近似で 2.09455147 の解を得ている

1.1 Newton の行った手計算

解の点の値を $y = 2 + p$ とおく

$(2+p)^3-2(2+p)-5=0$
$-1+10p+6p^2+p^3=0$
p^2, p^3は微少故に無視すると
$-1+10p=0 \to P=0.1$
$y=2+0.1=2.1$　（第一近似）

$P=0.1+q$ とおく
$-1+10(0.1+q)+6(0.1+q)^2+(0.1+q)^3$
$=0.061+11.23q+6.3q^2+q^3$
q^2, q^3は微少故に無視すると
$11.23q=-0.061 \to q=-0.00543188$
$y=2+0.1-0.00543188=2.09457$(第 2 近似)

$q=-0.00543188+r$ とおく
$0.061+11.23(-0.00543188+r)+6.3(-0.00543188+r)^2+(-0.00543188+r)^3$
$=0.000185723+11.1616r+6.2837r^2+r^3$
r^2, r^3は微少故に無視すると
$11.1616r=0.000185723 \to r=-0.0000166395$
$y=2+0.1-0.00543188-0.0000166395=2.09455$(第 3 近似)

コンピュータは通常はこの辺りで収束と判断するが更に続けると

$r=-0.0000166395+s$ とおく
$0.000185723+11.1616(-0.0000166395+s)+6.2837(-0.0000166395+s)^2+(-0.0000166395+s)^3$
$=0.000371448+11.1618s+6.28375s^2+s^3$
s^2, s^3は微少故に無視すると
$11.1618s=0.000371448 \to s=-0.0000332785$
$y=2+0.1-0.00543188-0.0000166395-0.0000332785=2.09455$(第 4 近似)

s^2, s^3 の項を大胆に捨てているが収束は非常に早い。

2　J の数値計算

2.1　多項式 p.

多項式は J のプリミティブ `p.` で直ちに解を得ることができる。

$y = -5 - 2x + x^3$

```
 p. _5 _2 0 1
+-+------------------------------------------+
|1|2.09455 _1.04728j1.13594 _1.04728j_1.13594|
+-+------------------------------------------+
```

もう少し先まで表示してみる。文字化 (”:) を用いる。

```
0j15 ":  {. ;{: p. _5 _2 0 1
2.094551481542327
```

J は数値のどれかに x を付けると浮動小数点でなく分数を用いて細密に計算する。内容は x:に 1,2,_1,_2 のパラメーターを付けて見ることができる。

```
  % 3x
1r3  NB. simple

 _1 x: % 3x
0.333333

0j10 ": _1 x: % 3x
0.3333333333
```

2.2 ニュートン法と差分

ニュートン法は、

$x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

の反復計算を行うものである。J は微分演算子 D. があるので APL より容易にスクリプトが作れる。次のスクリプトは J の定番である。

ニュートン法は微分演算子を用いてシンプルに定義できる。動詞を左パラメーターに取るので副詞で定義しなければならない。ランクはベクトルを引数に取ることができるように (`"0`) とする。(`^:_`) は収束まで計算するようにしているが (`^:100`) 程度で打ち切っても良い。

Example $y = -5 - 2x + x^3$ をニュートン法で解いてみよう。

多項式は p. を用いて定義する。

```
 2 5 $  _5 _2 0 1&p. new_1 i:5
2.09455 2.09455 2.09455 2.09455 2.09455
```

```
2.09455 2.09455 2.09455 2.09455 2.09455
```

```
NB. Newton method
 new_1=: 1 : ' ] - x % x D.1' (^:_)("0)
```

2.3 差分のプリミティブ D:

数学者 *K.E.Iveron* は J に差分と微分のプリミティブを入れた。
差分 (D:) の過程で $f(x) = x^3$ の、Δx の大きさと数値の関係を見てみよう。

```
  tmp,. ;("1),.({@> tmp=. 0.1 0.01 0.001 0.0001 0.00001
  0.000001 0.0000001 0.000000001)  ^&3 D:(1)("0)(L:0)>: i.5

   0.1        3.31   12.61   27.91   49.21   76.51
  0.01        3.0301 12.0601 27.0901 48.1201 75.1501
 0.001        3.003  12.006  27.009  48.012  75.015
0.0001        3.0003 12.0006 27.0009 48.0012 75.0015
0.00001     3.00003 12.0001 27.0001 48.0001 75.0001
0.000001      3      12      27      48      75
0.0000001     3      12      27      48      75
0.00000001    3      12      27      48      75
```

差分では $\frac{1}{1000000}$ 位でも尾鰭が残る。
表示桁数では同じように見えるが

```
 0.000001  ^&3 D:(1)("0) >:i.5
3 12 27 48 75
```

内部の詳細を取り出すと極小部分は残っている。

```
 0j12 ":  0.000001 ^&3 D:(1)("0) >:i.5
3.000002999798 12.000006002211 27.000009005462 48.000012000671 75.000015016258

 0j12 ":  0.00000001 ^&3 D:(1)("0) >:i.5
3.000000003972 11.999999927070 26.999999747090 47.999999708281 75.000001231729

    ^&3 d.1 >: i.5   NB. 微分
3 12 27 48 75
```

```
 0j10 ":  ^&3 d.1 >:i.5
3.0000000000 12.0000000000 27.0000000000 48.0000000000 75.0000000000
```

$\frac{1}{1000000}$ でも差分と微分には差異が残る。

哲学や数学にも造詣が深かったアイルランドのバークリー大僧正 (Geoage Berkeley 1685-1753) は

”To be is to be perceives”

との考えから $fluxion$(流率) や $infinitesimal\,change$（無限小）を知覚できないものとして Newon や Leipnitz を著作で攻撃し、ハーレーやニュートンを不信者と呼んでいる。（1734）

*1

*2

*3

2.4 テーラー展開

テーラー展開で表した関数は収束が早いことで知られる。ここでも高次の項の大胆な切り捨てが行われている。テイラー展開はニュートンも用いている。

2.5 e のテーラー展開

$f(x) = e^x$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^{h-1}}{h} \cdot e^x$$

ここで $\frac{e^{h-1}}{h}$ を無限級数に展開すると

$$\frac{e^{h-1}}{h} = \frac{\left(1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \cdots\right) - 1}{h} = \frac{1}{1!} + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \cdots$$

h を正とすると $\frac{h^n}{n!} > \frac{h^n}{(n+1)!}$ であるから

$$e^h = 1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots$$

2.5.1 J のテーラー関数

```
^ t. i.8
```

*1 このとき Newton は 1727 年に既に亡くなっていた

*2 ハーレー ハーレー彗星で知られる。Newton にプリンキピアの執筆を促した

*3 バークリーはアメリカにも渡っている。カリフォルニアに縁の地名と大学名を残す。

```
1 1 0.5 0.166667 0.0416667 0.00833333 0.00138889 0.000198413

   +/ ^ t. i.8
2.71825
```

2.6 そして積分

積分が微分の逆関数であることはやはり、ニュートンのライプニッツが明らかにした。

K.E.Iverson は *anti derivative* として `d._1` を定義している。

- derivative

  $f(x) = x^3$

  ```
     ^&3 d._1 d.(1) 1 2 3 4 5
  1 8 27 64 125
  ```

- アンチ derivative(integral)

  $\int x^3 \rightarrow \frac{1}{4}x^4$

  ```
    ^&3 d._1 ] 1 2 3 4 5
  0.25 4 20.25 64 156.25
  ```

- 差分 differential

  $\Delta = 0.001$

  ```
    0.001 ^&3 D:(1)("0) 1 2 3 4 5
  3.003 12.006 27.009 48.012 75.015

    ^&3 d.1 ] 1 2 3 4 5 NB. derivative
  3 12 27 48 75
  ```

- anti differenial is error

  ```
    0.001 ^&3 D:(_1)("0) 1 2 3 4 5
  |nonce error
  |   0.001    ^&3 D:(_1)("0)1 2 3 4 5
  ```

■バークリーの批判　ローマ法王庁は 1600 年にローマで地動説を指示するジョルダーノ・ブルーノを火刑に処し、1633 年にはガリレオに終身刑を宣告し、軟禁した。

1714 年からイングランドは現在のウインザーに繋がるハノーハー王朝になり、大陸出身の世俗

の国王はフランス、オーストリーとの戦争が最大の関心事であった。ジョージ 2 世 (治世、1727-60) の王妃カロラインは賢明でそのサロンにはニュートンも招かれ、ヘンデルも支持されていた。

ニュートンは数学者であるよりも物理学者であって、惑星の運動や落下の理論とモデルを幾何によって記述した。細部の微差にはさほど関心を示していない。

ニュートン法、微分、テーラー展開はともに細部を切り捨て、大綱を求める。

イングランド経験主義哲学と神学の巨星バークリーは神学批判に向かう啓蒙主義に対し辛烈に批判した。

バークリーの批判は極限は $=$ でなく、$\simeq$ で記述しなければならないと言う類のものではなく、バークリーは極限という体系自体の成立が疑わしいというものである。

微分積分学が極限の問題を一応克服したのはラグランジュやコーシーの時代であった。

3 References

遠山　啓「数学入門　下」1960　岩波新書[*4]

[*4] 著者の逝去後 30 年経ても毎年版が重ねられている。