

方程式  $X^P = P^X$  の有理数解は？

Rational Solution of the Equation above

中野嘉弘（札幌市南区、86歳）

NAKANO Yoshihiro (Sapporo, JAPAN)

yoshihiro@river.ocn.ne.jp FAX 専 011-588-3354

つまらぬ数値計算と思いきや、なんと、ランベルト Lambert 関数 とか高級な話に繋がるらしい。

## 0. はしがき

Yahoo 知恵袋なる面白い Web 番組がある。歴史部門や数学・物理部門が中々、有益である。十日ほど前(Sep/ 9/16:47) に、表題の如き質問が出て、その回答が、なんと、たった 5 時間後(21:02)に、ベスト・アンサー BA を獲得した優秀な人が居た。

[http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question\\_detail/q1130422801](http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1130422801)

しかし、私(中野)としては、納得出来兼ねる点があったので、自問自答の形で、新質問者として、批判回答を仰ぐべく、再度、話題を提供した事件(?)があった。現時点では、未だ、進行中の問題である。

[http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question\\_detail/q1130541381](http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1130541381)

簡単なことで申し訳ないが、JAPLA 諸賢からもお知恵拝借したいと思い(最後の広尾研究会向けに)投稿します。宜しく！

## 1. 原質問

質問日時: 2009/9/9 16:47:46

▼「 $x^3=3^x$  は有理数の解を  $x=3$  しか持たないことを証明しなさい。よろしくお願ひします」

・ 補足  $\log x/x$  のグラフを書くと  $2 < x < e$  の間にも解があるのですが、これが無理数であることを示せません…。

● BA に選ばれた回答 from shentechs さん、日時:2009/9/9 19:03:24

$x \leq 0$  だと、 $x^3 \leq 0 < 3^x$  なので、 $x > 0$  の場合だけ考えます。

$a, b$  を互いに素な自然数とし、 $(a/b)^3 = 3^{(a/b)}$  とします。

両辺を  $b$  乗して、 $(a/b)^{3b} = 3^a \Leftrightarrow a^{(3b)} = 3^a \cdot b^{(3b)}$

両辺は整数で、右辺が3の倍数なので左辺も3の倍数です。

$a = c \cdot 3^n$  ( $c$  は3の倍数ではない)とおくと、 $n \geq 1$  なので、 $b$  と  $a$  は互いに素という仮定から、 $b$  は3の倍数ではありません。

$3^{(3bn)} \cdot c^{(3b)} = 3^a \cdot b^{(3b)}$  となり、両辺の3の素因数の個数を比べて、 $3bn = a$  となります。

$a/b = 3n$  なので、 $x = 3, 6, 9, 12, \dots, 3n, \dots$  の場合に  $3^x = x^3$  が成り立つかどうかを調べればよいのですが、 $x > 3$  のとき、常に  $x^3 < 3^x$  が成り立つので、 $3^x = x^3$  の有理数解は  $x=3$  だけです。

▲ 質問した人からのコメント 日時:2009/9/9 21:02:40

よく分かりました。  
全く同じようにして  $x^p = p^x$  ( $p$  は素数) の有理数解は  $x=p$  しかないと言えそうです。

◆ BA から外れた解 (nakanochurchさん)、日時:2009/9/9 19:50:54

与式、 $x^3 = 3^x$  から  $x = 3^{(x/3)} \dots (1)$ 。

$n = 1, 2, 3, 4 \dots$  として  $x = 3 \cdot n \dots (2)$  と置く。

$3 \cdot n = 3^n$  から  $n = 3^{(n-1)} \dots (3)$  を得る。

$n = 1$  の時、(3)式は成立する。 $x = 3$  の時である。

左辺で  $n$  が、2, 3, 4  $\dots$  と、1 ずつ増加する時、  
右辺は 3 倍ずつ増加するので、等号が成立する事は無い。

次に  $n$  を -1 ずつ減少させる。

$n = 0$  では、(3)式は  $0 = 1/3$  となり、等号は不成立。

さらに -1 すれば、 $-1 = 3^{(-2)} = 1/9$ 、左辺は負数、

右辺は正数であるから、等号は不成立。

また、その先でも、不成立。

即ち、等号が成立するのは、最初の  $n = 1$ 、即ち、

$x = 3$  の場合に限る。

(少々、ごちないかな?)

## 2. 再質問

質問日時 2009/9/12 21:29:06 from nakanochurch

「方程式  $x^p = p^x$  の有理数解  $x$  を求めよ。今は  $p=3$  とする。」

なる質問が先日の知恵袋にあった(2009/9/ 16:47、解決 9/9 21:02)。

[http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question\\_detail/q1130422801](http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1130422801)

すでに解決済みらしく見えるが、もっと考察すると面白そうなので、質問の形で、再論を引き出したい。これまでの話は、次の2件である。

1) 原質問者は、有理数解は唯 1 つと考え、その証明を求めている。

(回答者、2人あり。)

2) グラフ的には、解が2ヶありそうだが、無理数解らしい? ので除外する

とも、先の方質問者は述べている。

さて、私(新・質問者)の描いた上記 2) の件のグラフを下掲(本稿末尾?)

するが、解は確かに 2 ヶある。一体、この原質問の真の意味は何か？

私は考える。

● 3) 原質問者の云う唯一つの有理数解とは、トートロジー的な自明解に過ぎない。

即ち、 $x^3 = 3^x$  の解が  $x = 3$  とは、まさに、そうである。

私の質問形式  $x^p=p^x$  で言えば、 $x = p$  が、いつでも解である。

整数、分数、無理数、超越数・・・などに関係なく tautological な話だ。

● 4) グラフ的に見出された、非自明的な解は、 $p = 3$  にたいして、

私の数値解では、 $x = 2.478052680288461$

有理数表示では  $x = 1696072511786r684437633339$  ( $r$  は分数記号)

でした(有効数字 16 桁の範囲での有理数解はこれ)。

グラフの図は、画像取り込みの都合上、本稿末尾に示す。

5)  $p = 2, 3, 4, 5, \dots, 100, \dots$  では、解は 2 ヶが可能であるが、 $p < 1$  例えば、 $p = 1/3$  では、自明解のみになるようだ。

と云う訳で、この問題の求解は、面白い問題かも知れぬ？ と提案します。

(以上の数値計算には、カナダ産の一般電算言語 J を利用しました。これは、[www.j.com](http://www.j.com) から無料で DL 可能です。日本での研究団体は慶応大学理工学部辺りにあります。)

★ 対する 新回答 from hlkoki さん、日時:2009/9/12 23:27:14

ん？あの証明で十分だと思うが。

>さて、私(新・質問者)の描いた上記 2) のグラフを下掲するが、解は確かに >2 ヶある。一体、この原質問の真の意味は何か？

いや、だから、非自明解が無理数で有る事かどうかが焦点でしょ。これは回答者の証明でなんら問題はない。

ちなみにその非自明解を具体的に表すと、

$$x = -3W(-1/3 \cdot \log 3) / \log 3 \quad \dots \quad (h)$$

W はもちろんランベルト関数のこと。 (以上)

### 3. J 言語 による 計算

(ランベルト関数などの情報を得る以前の計算である。)

「原理」 与式  $x^p = p^x$  の両辺の対数をとリ、

$$p \cdot \log x = x \cdot \log p \quad \text{から} \quad x = (p \% \log p) \cdot \log x \quad \text{故}$$

$$f(x) = x - (p \% \log p) \cdot \log x \quad \text{の 零点 を探せばよい。}$$

「関数定義」

$$Lpx =: 3 : '(y \% \wedge. y)'$$

$$Fpy =: 3 : '(Lpx0 * \wedge. y) - y'$$

$$Fpyb =: 3 : 'y - (Lpx0 * \wedge. y)'$$
 NB. Fpy と符号が違うのみ。

$$\lim =: \wedge : _$$

```
Newton =: 1 : ']' - x % x D.1' (^:_ ) ("0)
```

```
load 'plot'
```

```
plot (]; 関数名) steps 始点 終点 分割数
```

「計算」  $p = .3$  (方程式  $x^3=3^x$  の求解) の場合。

○ 第1の解:

```
]Lpx0=. Lpx 3 -> 2.73072
```

```
Fpy 3 -> 4.44089e_16 = 0 方程式を満たす。解である。
```

ただし、これは、明らかに！ 自明解である。

自明解でも、この程度の計算残差があるのだ。記憶に留めよ！

● 第2の解は？

```
Fpy Newton 2 -> 2.47805
```

( 始点 2.71 以下では Fpy Newton 2.71 -> 2.47805 の如く  
ここに収束する。)

```
Fpy 2.47805 -> _2.73287e_7 ≐ 0
```

より詳しくは(既報の如く)

```
Fpy 2.478052680288461 -> 1.64313e_14 = 0
```

その有理数表示は

```
x: 2.478052680288461 -> 5602488517847r2260843186431
```

```
x: Fpy 5602488517847r2260843186431 -> 1r562949953421312
```

(有効数字15桁の範囲内での有理数解とも云えようか？)

求解のグラフの表示法は

```
plot (]; Fpy) steps 2 4 200
```

グラフの実例は下掲 (電子版では、本稿末尾に挿入)。

#### 4. $p = 3$ 以外での非自明解

$p = 4$ :

```
]Lp14=. Lpx 4 -> 2.88539
]Lpx0=. Lp14 -> 2.88539
Fpy 4 -> 0 自明解。
Fpy Newton 4 -> 4
Fpy Newton 3 -> 4
Fpy Newton 2 -> 2
Fpy 2 -> 0 非自明解
```

何故なるか？  $Lpx\ 2 \rightarrow 2.88539 = Lpx$ 、同じだ。  
こう云う時には、こうなる。  
根 4 と 2 は共役解である。

$p = 5$ :

```
Fpy Newton 3 -> 5j_5.14733e_22 = 5 自明解へ収束。
Fpy Newton 2.7 -> 1.76492
Fpy 1.7649219145 -> _1.95957e_11 = 0
```

即ち、非自明解は  $1.7649219145 =$   
その有理数表示は  $3382341138977r1916425373349$ 。

$p = 2$ : 共役解  $p = 4$  と。

$p = 1$ :  $\log 1$  の発散問題あり、特異点につき除外。

$p = 1.2$ :

```
]Lp12=. Lpx 1.2 -> 6.58178
]Lpx0=. Lp12 -> 6.58178
Fpy 1.2 -> 0 自明解。
Fpy Newton 1 -> 1.2
Fpy Newton 0.5 -> 1.2 へ収束。
Fpy Newton _0.1 -> 1.2j_3.77237e_28 = 1.2 へ収束。
```

```
Fpy Newton _0.5 -> 19.5763j_6.30569e_23 = 19.5763。
```

```
Fpy 19.5763 -> 1.14568e_5  $\approx$  0
```

非自明解が  $19.5763$  付近にある。

```
Fpy Newton 20 -> 19.5763 へ収束。
```

なお、Fpy Newton 0.1 -> 1.2 へ収束。

$p = 1.1$ :

```
]Lp11=. Lpx 1.1 -> 11.5413
]Lpx0=. Lp11 -> 11.5413
Fpy Newton 2 -> 1.1
Fpy Newton 20 -> 43.5577
Fpy Newton 50 -> 43.5577
```

Fpy 1.1 -> 0

Fpy 43.5577 -> 3.07068e\_5 = 0

より詳しくは

Fpy 43.5577417759 -> 5.56355e\_12 = 0、

根の有理数表現は  $1.1 = 11r10$  と

$43.5577417759 = 1321165339649r30331355249$ 。

同様に、

$p = 0.5$  では 解は 自明解  $0.5$  のみで、他に非自明解は見えぬ。

$0 < p < 1$  では、自明解  $p$  以外では、他に非自明解は見えぬ。

★  $p = e = 2.71828\cdots =$  自然対数の底 base の時には、同様に自明解しか無い。何故か!? 実数解での意味か? 今後の課題かも知れない?

## 5. Lambert 関数

前節 2. の末に、h1koki さんの回答に触れた。

ランベルト関数なる新顔が紹介されて面食らった。

数学ソフト Mathematica の Wolfram の関係の ワイスマンの 大著(文献 1) を調べた。下記の如き項目が見えた。

### ● Lambert's Transcendental Equation

Lambert (1758)

Euler (1779)

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta)v x^{(\alpha+\beta)}$$

$$\ln x = v x^\beta$$

$$x = \exp\{-W(-\beta v)/\beta\}$$

where  $W(x)$  Lambert's W-function

### ● Lambert's W-function

$$f(W) = W e^W$$

ただし、2. 節末尾の式 (h) との関係が、未だ、しっくりしない。

計算自身は J 言語流で満足出来るので、今云える事は、

$W = \log[e] (1/p)$  である限り、

$f(x) = x - (p/\log p) W$  は、 $x = p$  なる 自明解を持つ。

詳細は後日に再論しよう。

## 5. むすび

J 言語の PR をする羽目になりました。無料 DL 後、初心者のチュートリアルが大切だろう。

2. 節の末尾の「慶応大学工学部辺り」を、何とか旨く、表現出来たら良いなと思います。

## 文 献

- 1) Eric W. Weisstein " CRC Concise Encyclopedia of MATHEMATICS 2nd Ed." Chapman & Hall/CRC 2003 p. 1684

