固有値問題（11） 固有ベクトルの簡単な計算法

A Simple Method for Eigen-Vectors (Part 11)

中野嘉弘 （札幌市南区、86 歳）

NAKANO Yoshihiro (Sapporo, JAPAN)

yoshihiro@river.ocn.ne.jp　　FAX 専 011-588-3354

とっさに固有ベクトルを計算する話である。

0. はしがき

インターネットの Yahoo 知恵袋などの質疑回答番組で、よく遭遇する問題に、「固有ベクトルの数値、これで良いでしょうか？」がある。
この回答は「やれば出来る筈では不十分で、実際、やって見てから回答」する必要がある。 その計算法の例は、JAPLA 研究会で、最近すでに 2 例の報告がある。 志村正人「非対称行列の固有値を求める」（文献 1）と 中野嘉弘「固有ベクトル計算の話題 J と固有値問題（その 10）」（文献 2）。

それらと同じような事だが、より判り易く、簡単に処理した例を示そう。

1. 計算法 の あらまし

固有ベクトルを求めるに、連立方程式を解くなど、見通しの悪い煩瑣な？方法でなくて、J 言語が得意とする行列演算だけで、済む様にする。
λを固有値として、行列 | A - λE | の計算の組合せで済ませる方法である。

例 1） 与行列 A2a

```
3 1
2 2
```

固有値 LF0 A2a

```
4 1
```

準備]A0=. A2a - 4*(un 2)　　ここに un は単位行列を作る関数。

```
_1  1
 2 _2
```

```
      ]A1=. A2a - 1*(un 2)
2 1
2 1
```

固有ベクトル

```
 NB. for λ= 4, from A1,  eig-vec 2  2  or 1  1
 NB. for λ= 1, from A0,  eig-vec 1 _2  or 1 _2
```

例 2 ） 与行列 A33

```
 0  1  1
_4  4  2
 4 _3 _1
```

固有値 LF0 A33

```
2 1 0
    準備  ]B0=. A33 - 2 *(un 3)
_2  1  1
_4  2  2
 4 _3 _3
        ]B1=. A33 - 1 * un 3
_1  1  1
_4  3  2
 4 _3 _2
        ]B2=. A33 - 0 * un 3
 0  1  1
_4  4  2
 4 _3 _1
```

固有ベクトル

NB. 固有値 λ＝2 に対して

```
      B1 idot B2        NB.  idot は行列の内積を求める関数
 0  0 0
_4  2 0
 4 _2 0
    NB. λ＝2 , eigvec  0 _4 4  or  0 2  _2
```

NB. 固有値 λ＝1 に対して

```
     B0 idot B2
0 _1 _1
0 _2 _2
0  1  1
    NB. λ＝1 , eigvec  _1  _2  1
```

NB. 固有値 λ＝ 0

```
     B0 idot B1
 2 _2 _2
 4 _4 _4
_4  4  4
    NB. λ＝ 0 , eigvec  2 4 _4  or  1 2 _2
```

3. 複素数を含む場合

どうも、錯覚が横行して居るらしい？

1) Yahoo 知恵袋 （最近の質問 2009.10.10 ）
http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1431601584

与行列 A =
(1 2 -1)
(1 3 1)
(2 4 -2)

に対して、計算してみたところ固有値が 0 と 1±2√2i となり虚数が入ってしまいました。

この場合どのように固有ベクトルを計算すればいいのでしょうか。

（回答 1 elgoad4qma さん）
固有値が虚数でも実数でも方法は同じです。
ところで、この行列の固有値は 0, 1±√10 になると思うのですがいかがでしょうか？

（回答２ 中野）
固有値は、先の回答者 elgo さんの云う通り 0, (1 ±√10) ですね。
虚数ではありません。なお、 対応する固有ベクトルは
(5, -2, 1)、
(√10, 5+√10, 2√10)、
(-√10, -5+√10, -2√10) ですね。
虚数でありませんので、御質問の範疇では無いと見て、参考として、結果のみを
お答え致しました。

2) 志村氏の例(文献1, p.14)複素数の固有値、行列要素の摂動 perturbation

原行列 c0 =. > _149 _50 _154; 537 180 546; _27 _9 _25 λ= 3 2 1
摂動行列 c2 =. (2,2)要素 179.998
志村解は(文献1)を参照下さい。 摂動解が中野解と僅かに食い違うので、
その中野解のみを示そう。
摂動行列 c2n =. (2,2)要素 179.997767 で

固有値 LF0 c2n より λ= 2.89579 1.55099j±0.0174075 を得た。

```
   LF0 Cp2a   NB. 179.997767
2.89579 1.55099j0.0174075 1.55099j_0.0174075
```

対する固有ベクトルは
準備

```
     ]cp2a0=. Cp2a - 2.89579 * (un 3)
_151.896     _50     _154
   537 177.102      546
   _27       _9 _27.8958
  ]cp2a1=. Cp2a - 1.55099j0.0174075 * (un 3)
_150.551j_0.0174075                _50              _154
         537 178.447j_0.0174075                546
         _27                 _9 _26.551j_0.0174075

  ]cp2a2=. Cp2a - 1.55099j_0.0174075 * (un 3)
_150.551j0.0174075               _50              _154
         537 178.447j0.0174075                546
         _27                 _9 _26.551j0.0174075
```

の後、

```
    cp2a1 idot cp2a2  NB. λ= 2.89579
_26.3991 _8.78935 _26.2951
 238.038  79.2525    237.1
_51.2465 _17.0621 _51.0446

  cp2a0 idot cp2a2  NB. λ=  1.55099j0.0174075
 176.062j_2.64413  58.4506j_0.870375   180.804j_2.68076
  _484.12j9.34783     _160.723j3.0829     _497.161j9.5045
_14.9369j_0.470002 _4.95888j_0.156667 _15.3392j_0.485596

  cp2a0 idot cp2a1  NB. λ=  1.55099j_0.0174075
 176.062j2.64413  58.4506j0.870375   180.804j2.68076
 _484.12j_9.34783  _160.723j_3.0829   _497.161j_9.5045
```

_14.9369j0.470002 _4.95888j0.156667 _15.3392j0.485596

となる。

これらの最後の数値は志村報告(文献1, p.15)の対角化の表値と殆ど一致している。
私の報告の特徴は、やって居る事が、極めて判り易いことですね。

4. 実戦的例 (主成分分析)

1) 準備の意味で、鈴木例 (p.128 以降)をトライする。

◎ 2 x 2 行列 M2 =. > 6 2; 2 3
固有値 LF0 M2 より λ = 7 と 2。
固有ベクトル

```
 ]a0 =. M2 - 7 *( un 2)  for λ =  2
_1   2
 2  _4
 ]a1 =. M2 - 2 * (un 2)   for  λ = 7
 4   2
 2   1
```

・ 比較表示　中野流　　　鈴木流

```
      7   2  1   7   0.894427  0.447214
      2  _1  2       2  _0.447214  0.894427
```

固有ベクトル成分の平方和 = 1 に規格化すれば、両者一致する。

▲ 3 x 3 行列 M3 =. > 18 0 9 ; 0 6 _3 ; 9 _3 6
固有値 LF0 M3 より λ = 22.9373, 7.06275, 0
固有ベクトル計算準備

```
 ]b0 =. M3 - 22.9373 * (un 3)
 ]b1 =. M3 - 7.06275 * (un 3)
 ]b2 =. M3 - 0  * (un 3)
```

固有ベクトル計算
・for λ = 22.9373,　b1 idot b2 より

```
  277.87   _27     152.435
    _27    2.6235  _14.8118
  152.435 _14.8118   83.6235
```

前例の表示(中野流)で
22.9373 277.87 _27 152.435
同(規格化した鈴木流で)
22.9373 0.873575 _0.0848833 0.479229
・for λ = 7.06275,　b0 idot b2 より

```
  _7.8714      _27    9.5643
    _27 _92.6238  32.8119
   9.5643  32.8119 _11.6238
```

前例の表示(中野流)で
7.06275 _7.8714 _27 9.5643
同(規格化した鈴木流で)
7.06275 0.264951 0.908819 _0.321934
・for λ = 0,　b0 idot b1 より

```
   26.9995     _27   _54.0005
     _27   27.0001  54.0002
  _54.0005   54.0002      108
```

前例の表示（中野流）で

```
   0   26.9995     _27   _54.0005
```

（鈴木流の比較資料は原著には欠）

こんな処で、同じ結果が簡単に得られ、自信を得た。

2） 鈴木先生の例題「美人のプロポーション」（文献3）

● p.132 のデータの相関行列 R =.corm STYLE を出発の 5x5 行列 szk5 とする。

```
   1  0.542494  0.326565   0.326565     0.0115011

0.542494        1    0.3131    0.449056     0.241926

0.326565   0.3131         1    0.0605705    0.424285

0.372425  0.449056  0.0605705          1  _0.0649716

0.0115011 0.241926  0.424285  _0.0649716          1
```

● 固有値を求める。 LF0 szk5 から

```
   2.13939 1.30185  0.688549  0.516028  0.354183
```

その和は、次元数 5 に等しい。

```
 +/ 2.13939  1.30185  0.688549  0.516028  0.354183
5
```

● 今話題の（中野の）流儀で固有ベクトルを求めよう。

準備：

```
 ]sz0=. szk5 - 2.13939*(un 5)
_1.13939 0.542494  0.326565   0.326565  0.0115011
0.542494 _1.13939    0.3131   0.449056   0.241926
0.326565   0.3131  _1.13939  0.0605705   0.424285
0.372425 0.449056 0.0605705   _1.13939 _0.0649716
0.0115011 0.241926  0.424285 _0.0649716   _1.13939
```

同様に sz1=. szk5 - 1.30185 *(un 5)

```
     sz2=. szk5 - 0.688549 *(un 5)
    sz3=. szk5 - 0.516028 *(un 5)
    sz4=. szk5 - 0.354183 *(un 5)
```

ベクトル計算

```
  NB. eig-vec0
 ] vz0 =. sz1 idot(sz2 idot(sz3 idot sz4))

0.943313  1.03385 0.768379 0.691545 0.475732
1.05693  1.15837 0.860929 0.774841 0.533033
0.779617  0.85444  0.63504  0.57154 0.393177
0.738845 0.809756 0.601829  0.54165 0.372615
0.482122 0.528393 0.392714 0.353445 0.243144
```

```
 ] vc0=. 0 { "1 vz0
0.943313 1.05693 0.779617 0.738845 0.482122
```
規格化作業
```
 +/ vc0^2
3.39308
 %: 3.39308
1.84203
 ]vc0n=.vc0 % 1.84203
0.512105 0.573787 0.423238 0.401104 0.261734
```
鈴木計算との比較(p.132 下段 5 evs R 第1行)

0.521033 0.570928 0.419977 0.399578 0.25792

J の version は、中野が J6.02 で新しい。
```
 +/ vc0n^2
1
```
一致は良い。

以下同様にして、

```
 NB. eig-vec1
   vz1=. sz0 idot(sz2 idot(sz3 idot sz4))
 ] vc1=. 0 { "1 vz1
_0.0210368 _0.0113885 0.0447741 _0.0475256 0.063235
 +/ vc1^2
0.00883432
 %: 0.00883432
0.0939911
 ]vc1n=.vc1 % 0.0939911
 ]vc1n=.vc1 % 0.0939911
_0.223817 _0.121165 0.476365 _0.50564 0.672777
 +/ vc1n^2
0.999999

  NB. eig-vec2
 vz2=. sz0 idot(sz1 idot(sz3 idot sz4))
 ] vc2=. 0 { "1 vz2
0.0160157 _0.00605392 0.0105181 _0.0152622 _0.0134008
 +/ vc2^2
0.000816298
  %: 0.000816298
0.0285709
 ]vc2n=.vc2 % 0.0285709
0.560559 _0.211891 0.368139 _0.534187 _0.469036
 +/ vc2n^2
1

 NB. eig-vec3
 vz3=. sz0 idot(sz1 idot(sz2 idot sz4))
 ] vc3=. 0 { "1 vz3
_0.002457 _0.003942 0.00577721 0.00449975 _0.00243138
 +/ vc3^2
8.11116e_5
 %: 8.11116e_5
0.0090062
 ]vc3n=.vc3 % 0.0090062
```

```
_0.272812 _0.437698 0.64147 0.499628 _0.269967
  +/ vc3n^2
1
```

```
  NB. eig-vec4
  vz4=. sz0 idot(sz1 idot(sz2 idot sz3))
 ] vc4=. 0 { "1 vz4
0.0271111 _0.0295377 _0.0134636 0.00820515 0.0202531
  +/ vc4^2
0.00226627
  %: 0.00226627
0.0476054

  ]vc4n=.vc4 % 0.0476054
0.569497 _0.62047 _0.282817 0.172358 0.425438
  +/ vc4n^2
0.999999
  NB.
```

鈴木計算との一致は良い。

かくて、固有値、固有ベクトル計算は、マジックでは無くて、
根の公式程度の判り易い行列計算論理で、簡単に可能となった。

5.　鈴木流では出来なかった例

別に「あら探し」のつもりは無いが、知見した話題である。

■ 7 x 7 行列 mach77

```
 _1r2    _1r4      0     0      0    0       0
 _1r2     1r2      0     0      0    0       0
 11r7 163r105 17r12 _1r3 28r45 1r5 _27r40
 _1     _3r2      0   3r2    1r4    0       0
 _1     _7r5      0   3r2    1r2    0       0
  0        0     _2     0      0    2     1r2
  0        0   _3r4     0      0    1     1r2
```

★ 鈴木流の関数では、演算は最初からフリーズして仕舞う。
最近、同じ内容で、新しい鈴木報告を見た（文献 4）。
関係ある話なのかな？

〇 中野流での結果は
固有値 LF0 mach77　より

```
 2.55638 1.79057 0.747905 0.612384 _0.612372 0.612372 0.209431
+/ 2.55638 1.79057 0.747905 0.612384 _0.612372 0.612372 0.209431
5.91667
```

（固有値の和は 7 に成らぬ！？）

固有ベクトル例 （for λ= _0.612372 ） 未規格化

```
     m0 idot (m1 idot (m2 idot (m3 idot (m5 idot m6))))
 11.5965   2.60625           0           0           0          0          0
 5.21251   1.17148           0           0           0          0          0
_12.2439  _2.75176 _4.29841e_6 _3.04325e_7 _1.33112e_6 1.74713e_6 1.84684e_6
 8.54465   1.92036           0  8.61511e_7  1.40801e_7          0          0
 5.46313   1.22781           0  8.44807e_7  2.98307e_7          0          0
```

```
_9.41344  _2.11561   2.9861e_5  5.19806e_6  9.69637e_6 _1.22398e_5 _1.27659e_5
0.207234 0.0465793  1.60764e_5  2.76643e_6  5.34579e_6 _6.59892e_6 _6.86701e_6
```

報告は一部に留めるが、今後の研究課題であろう。

文　献

1) 志村正人「非対称行列の固有値を求める」JAPLA 2008/1/24、pp.18

2) 中野嘉弘「固有ベクトル計算の話題 J と固有値問題(その 10)」
JAPLA 2008/3/22、pp.13

3) 鈴木義一郎「J 言語による統計分析」 森北出版 1996.10.14
pp.128-132

4) 鈴木義一郎「固有値と主成分分析」 JAPLA 2008/1/22、pp.3

Scripts

```
wr=: 1!:2&2
un=: 3 : '=@i.y'   NB. unit matrix
idot=: +/ . *      NB. inner prodyct

LF0=: >@{:@p.@charn0

charn0 =: 3 : 0
 In=. =@i.n=. # y
 X=.In
 i=.0
p=.1
for_k. >: i.n do.
NB. wr ' k = ', ": k
 X =. y + / . * X
NB. wr ' trX = '
 trX =. +/(<0 1)|:X
NB. wr ' pk =  '
 pk=.-k%~trX
 p=.p,pk
 X=.X+ pk * In
 i=.i + 1
 end.
 |.p
)
```