大数のペリアン（ Pell 方程式）の 話題 Beiller 本中の巨大数

山下紀幸 · 中野嘉弘

2009 年 3 月 27 日

目次

[*1]

[*2]

はしがき

ペリアン即ちペル方程式は２次の不定方程式の代表例である（文献１、２、３、４）。

山下流の多倍長演算法の有効な結果例をペル方程式の場合で紹介したい。山下法の元来は、Ｊ言語の初期の版 Ｊ２ あるいは、鈴木義一郎・北野利雄先生が、その著書で紹介された ＪＰＣ（文献５）を用いる。その為、最新の Ｊ６版 のユーザーには、馴染み難いと思うので、中野が書き直した。面白い例題であろう。

1　ペリアンで既知の事

1.1　西川論文（文献７）

２次の不定方程式 $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の最小整数解。

デオファンテス方程式とかフェルマー・ペル方程式と呼ばれる。オイラーも研究している。$D = 61$ の近傍が、英国のウィリアム征服王の正方軍団（1066 年）からみで着目された。

解法には「連分数展開法」がある。　解は、$D = 60$ に対し、 $x = 31, y = 4$

$D = 62$ に対し、$x = 63, y = 8$　しかし、$D = 61$ に対しては、$x = 1766319049, y = 226153980$

[*1] 山下紀幸（さいたま市、８４才）FAX/TEL 048-607-2422

[*2] 中野嘉弘（札幌市、８６才)FAX 専　011-588-3354 yoshihiro@river.ocn.ne.jp

1.2　竹内端三著（文献３）

巻末付表　Cayley Collected Mathematical Papers, V.13 より。

$D = 1 \sim 100$ に対する解（最小正根表）。　　D が完全平方数の時には、y は正数にならぬので、解は $x = 1, y = 0$ と記す。　　解が巨大数になる例：

```
D =    53,      61,       73,        85,       94,       97
x = 66249, * 29718,  2281249,    285769,  2143295,   * 5604
y =  9100, *  3805,   267000,     30996,   221064,   *  569
```

ただし、∗ 印の処は、桁数過大につき、特別に、$x^2 - Dy^2 = -$ の最小正根を示した。これより、$X^2 - DY^2 = 1$ の解　(X,Y) は、次の関係式で簡単に計算出来る。

$X = x^2 + Dy^2, Y = 2xy$　$D = 61$ の場合の数値は、上の西川例に示しておいた。）

1.3　Beiler の本（文献１）　p. 255

Table 92 (Large Values)

D	x	y	
1515	506	13	
1516	3349491700186010500111 891352199 (33 digits)	860259161857394462507239 8763290 (31 digits)	全 64 桁
1597	519711527755463096224266 385375638449943026746249 (48 digits)	130049860887907722503095 04643908671520836229100 (47 digits)	全 95 桁
1598	1599	40	
1690	161	4	
1621	(76 digits)	(75 gigits)	全 151 桁
9781	(155 digits)	(154 digits)	全 309 桁

4: 他　の　数　表　など

・　Canon Pellianus (by C.F. Degen 1817)

$y^2 - Cx^2 = 1\ for\ C < 1000$

さらに、拡張版もある。

・　The Pell Equation (by E.E. Whitford)　$x^2 - Dy^2 = 1\ for\ D = 1501 to 2012$

・木田祐司・牧野潔夫（文献２）：　p.124 pell2

$x^2 - Dy^2 = 1\ for\ D = 213331$
解　x (198 digits) , y (195 digits)

2　山下流多倍長演算& ＪＰＣ

三月初め以来、我々（いわゆる三老賢人）の間で FAX が飛び交い（文献 ８）、話は進み、豊富なデータが蓄積された。　整理の困難が懸念されたが、最近、最終的 情報が、（さいたま市に転居したばかりの）山下から、もたらされた（文献 ９）。　前節 １．中の Beilers Table の検算が、正しく試算出来たと云う事だ。

使用した山下プログラムを下記に示す（ＪＰＣ版、６桁表示、 2009.3.20)。　主計算用関数

```
 p12mk =: 3 : 0
    :
 rd =. <. %: d =. y. [ i =. x.
 p1 =. rd [ q1 =. 1 [ p0 =. 1 [ q0 =. 0
 t =. 1 [ a =. p1 [ s =. 0
   while. 200 >: i  do.
 s =. (a*t) - s
 t =. <. (( d - (s^2)) % t)
 a =. <. (( s + rd) % t)
 p2 =. ( a mult p1) add p0
 q2 =. ( a mult q1) add q0
 p0 =. p1 [ q0 =. q1
 p1 =. p2 [ q1 =. q1
    if. ( s = rd) * ( t = _1^i) do. break. end.
 i =. >: i
   end.
 ' '
wr ' No ', ": d
wr p0
   q0
)
```

検算用関数

```
xmy =: 3 : 0
```

```
x1 =. > 0{ y. [ m =. > 1{ y. [ x2 =. > 2 { y.
wr  a =. x1  mult x1
b =. m  mult x2  mult x2
)
```

その他の山下流多倍長補助関数　mult, add （６桁刻み）の　詳細は省く。

演算例（主）

```
    1  p12mk  1516
No 1516
334 949171 001860 160500 111891 352199
8 602591 618573 944625 072398 763290
```

検算例

]y =. 1 p12mk 1516　**（結果は上述の如し）**

xmy　y

・・・・・・　**数字列（途中省略）**　・・・・　366400

・・・・・・　**数字列（途中省略）**　・・・・　366399

上下の末尾の差　＝　１　になれば可。

3　大数例　続々の山下情報

解が巨大数の例を発見したとの山下報告が、その後、相次いだ（文献１０以上)。ペリアン $x^2 - Dy^2 = 1$ で、解 x が１５０桁以上の巨大数になる場合である。解 x の先頭部と最後尾を ６桁刻み で示して置く。

D = 4000 **〜** 5000 **台の場合には無いようだ。**

６０００台	D = 6301,	x = 1365	272745 ・・・・・・・	071049
	D = 6829,	x = 329193	470472	671049
７０００台	D = 7549,	x = 22	537719	281801
８０００台	D = 8089,	x = 32076	000259	442099
	D = 8269,	x = 33	062619	261449
	D = 8821,	x = 18	265550	337801

```
          D = 8941,  x =    2565  007112                744201
９０００台 D = 9241,  x =      12  573838               844449
          D = 9349,  x =      51  656307                201801
          D = 9421,  x =    5112  161261                503049
          D = 9601,  x =  218157  225950                618049
          D = 9769,  x =       2  677385                656801
          D = 9781,  x =  476253  759140                993801
          D = 9949,  x =      23  551019                186249
```

以上　１４例。　諸賢のさらなる発見を期待したい。

3.1　Ｐｅｌｌ最終便として（文献１０－ｃ）

D = 213331

これは、木田・牧野の本（ＵＳＢ関係、文献２）p.124 に掲載されて居る巨大数例である。

山下演算：　1 p12mk 213331

答は、６桁刻み表示で

```
x = 131444 663039  ・・・途中省略・・・・・・・  032505 （198 桁）
  y =     284 587599  ・・・途中省略・・・・・・・  747052 （195 桁）
```

検算は、　　　xmy　z0　**より**

```
   x^2 相当  17277 699441 ・・・・・途中省略・・・・・・・  575025
 D*y^2 相当  17277 699441 ・・・・・途中省略・・・・・・・  575024
 上下の引き算は                                             1 （正解）
```

めでたし、めでたし！

4　Ｊ６版用に書き直し　（中野）

山下は、我流（ＪＰＣ）で全てを押し通したが、Ｊ言語の最近の版のユーザ向けに、書き直した方が親切かも知れぬ。　中野が山下を追試したＪ６０２版でのスクリプトは、稿末に纏めておいた。　本文中では、利用した結果のみを書く。（中野）関数 pellmy 等は、山下関数 p12mk 相当、（中野）関数 pchk が検算用で山下関数の xmy 相当である。　なお、（中野）関数 pellmy_1 等、_1 を添えたものは

$x^2 - Dy^2 = -1$（+1 では無くて）用の計算関数である。

それが基本的で、さらに計算結果の出力法への多少の工夫によって、若干の区別があり（w 等の

文字）を付してある。

●　例題として、前節 ３．の最後の木田・牧野による最長の与データの場合 D = 213331（文献２）を先ず採ろう。 山下 FAX でも、最終便ともなったものだ。

例　1）　`213331  pchk   x: pellmy    213331`

答は　`D = 213331`　**と**　`1`　**（予定通り簡単に）**

詳しくは

例　2）　`pellmyw   213331`　**より、主計算の結果は**

```
      D = 213331


   D pchk pellmy D =. 213331x
 D =  213331
 1

      pellmyw D =. 213331x
 D =  213331
      # ": p0w
 198
      # ": q0w
 195

          3 50 $ ": p0w
13144466303976968956509778631262284180845315685609
51636107101514620552653577659069197376501621481350
73213924670382373966465811572272797993781975034071
   _48 {. ": p0w
866554364517652340502963565223569216680183032505

    3 50 $ ": q0w
28458759980350712169478780708816737418791091116265
19895962746235591612668493599048417052737076701426
53449360888800824221931075668386886920941365635239
   _45 {. ": q0w
103841914170425364134569915085498055203747052
```

● **例__１のａ）**　 D　pchk　pellmy_1　D =. 61　 **から**
　答は　D = 61 **と** _ 1 **と**　**桁数** 5　**と**　4

　次いで　　pellmyw_1　61　　**から**
　　D =　61　**と**　29718 **（５桁）**　**と**　3805　**（４桁）**
　これは、第１節２：竹内端三の項の D = 61 **の　＊印に対応。**

（比較）：　ペリアンの右辺＝＋１の場合の解は

```
   D pchk pellmy  D =. 61
 D =  61
      10
       9
       1
   pellmyw  61
 D =  61
     1766319049
      226153980
```

（10 桁）（ 9 桁）

ペリアンの右辺　＝　± 1 **の時の両結果の換算は、既に第１．節に述べた。**

例__１の b**）**　D =. 97　 **で、ペリアンの右辺の正負が**
　　＝　_1 **の時　結果は**　　 5604（4 桁）　**と**　　569（3 桁）。
　　＝　 1 **の時　結果は**　62809633（8 桁）　**と**　6377352（7 桁）。

右辺が負数の場合の方が、簡単であるようだ。

5　木田 · 牧野例以上の　巨大数解を求めて

D = 213331 即ち　山下の最終便データ（文献 10-c）以上の巨大解の有無の探索を試みた。　（山下が相棒の為に残してくれた例題かも知れぬ？）

新関数 pp　を下記のように定義する。

```
┌──┬──┬────────────────
│ 3 │: │:                │
│   │  │  x pchk pellmy y │
└──┴──┴────────────────
```

```
  pp /~ "(0) 213330  + i.3
```

を演算すれば、結果は

```
D =  213330
```

```
10
 D =  213331
198
198  198 284587599803507・・・・・(以下省略)・・・・・・・・・・・・・
   D =  213332
12
1 1 1
```
を得る。

今のデータは３例。　最後の １の ３ケ の羅列は、ペル方程式の結果が正解を示す。　　木田データでの解は、所謂、解 x が桁数 198 であるが、前後の データ 213330 と 213332 に対しては、解は僅々 10 桁 と 12 桁 に過ぎない事を示している。（解の中、y では一般に x より２桁程度少ないので、表示の省略も可。）

この流儀で、捜査範囲を拡大（３ に替わって １００刻みとかにして）すれば探索が容易に行われる。　その一例の一部を示す。

```
pp /~ "(0) 213333  + i.100

D = 213333     61
D = 213334    240   85126643790・・・・・・・・・・(今は以下省力)・・・・
D = 213335     20

D = 213337    255   10181363004228 ・・・・・・・・・
D = 213338    122   2578939927518409 ・・・・・・・・・
    ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・
     ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・
D = 213425    211    8541939103626064 ・・・・・・・・・・
    ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・
D = 213429     56

1 1 1 1 1 1 1 1 184 1 1  ・・・・・・・ 499 1 1 ・・・・・・
```

最下行値が 1 以外の時は、ペリアンの正解が得られなかったデータである。　　　　今の捜査例（213330 〜 213429）に、7　例あった。　これは、演算の主関数 pellmy　中の演算ループの回数 k =. 500 が、回数」として不足な為である。より大きくすれば、避けられる（巨大数の候補になり得る）筈のである。

結局、この範囲内の巨大数解の候補データは、下記の　32 ケ例である。

```
D =
213331  213334  (213337)   213338  213341  213343  (213349) 213352
213358   213359  (213361)   213364   213369  213373   213376  213373
213383  213385  (213391)  (213397) 213398  213401  213403  (213406)
213407  213409  (213412)   213415  213417  213421   213425  213429
```

この調子では、巨大数解の候補は、別に珍重するほどでは無くなろう。

6　むすび

多倍長演算が、割合、簡単に遂行出来た。　いままで、木田氏らのＵＳＢなど、特別のソフトが必須かと思っていたが、Ｊ言語　プラス　ちょっとした工夫　で、同等の演算が可能なことが示された。　　なお、ペリアンの計算では、右辺が負数　＝　－１　の場合の解の方が、正数　１　の場合より、簡単である。　それは、竹内端三先生著（文献３）のコメント（本稿、１．節の２：項）から、当然の事である。　ペリアンの問題、簡単にやる方法があるものだ。　　(文責　中野)

7　文献

1. Albert H. Beiler: ” Recreations in the Theory of Numbers”, Dover,1964 , The Pellian (pp. 248-268)
2. 木田祐司・牧野潔夫：「ＵＢＡＳＩＣ　コンピュータ整数論」日本評論社、1994、 連分数とPell の方程式 pp.108-130
3. 竹内端三：「整数論（改訂版）」　共立出版、昭和 21 年、４５節　$x^2 - Dy^2 = 1$ ノ理論（pp.238-256）、同・最小正根ノ表（1-100 まで、　from Cayley, Collected Mathematical Papers, Vol.13 より、　巻末）
4. 芹沢正三：「数論入門」講談社 Y1040 BLUE BACKS、2008.4.20 第６章　フェルマー・ペルの方程式（p.176-213）
5. 鈴木義一郎・北野利雄：「Ｊ言語による数学計算」森北出版、1996.10.14
6. 山下　FAX ’2009.2.5’：「連分数展開　$\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$」
7. 西川 FAX ’2009.3.4 ：「以前の関係論文を送ります。」　　－ａ）「ペル方程式とＪによる解」JAPLA 2002/02/23 pp.6
－ｂ）「Ｊにおける有理数（分数）と浮動小数点連分数の変換と計算」JAPLA 2001-1-27 pp.6
－ｃ）「同上　改訂版」　JAPLA 2001-2-10 pp.1
8. 中野 FAX H21.3.7 ：「山下 FAX（数独、ペル方程式）多謝。　西川 FAX（多桁演算、ペル方程式・プログラム）多謝。　トライしました。　ペルは高峯の花か？」

9. 山下 FAX (H21.3.21. am. 10:34):「 Beilers Table 92 (large value)　最後の 9781 等の検算結果です。　n = 314 digits　」
10. 山下 FAX (H21.3.22 15:14) :「Beiler の　例 9781 以外の 9949 で巨大数解」

ーａ）(3.23. am.8:27)**:「９０００台の追加例** 9241, 9349**」**

ーｂ）(3.23. 14:16)**:「巨大数解、しめて　１４例、　６３０１～　９９４９」**

ーｃ）(3.24. 11:41)**:「木田・牧野の巨大数解**　D = 213331 **にて** Pell **最終便」**

8　Script

```
      pellmy =: 3 : 0
  NB. pelly =: 3 : 0  for  _1 pelly 41
d=. y
rd=. <.%: d
q0=.0
p0=.q1=. 1
p1=.rd
t=.1
a=. p1
s=.0
i=.1
NB. k=. 20
NB. k=. 1000
NB. k =. 200
k=. 500
while. k>: i do.
s=.(a*t)-s
t=.<.((d-(s^2))%t)
a=.<.((s+rd)%t)
p2=.x:(a*p1)+p0  NB. old  without x:
q2=.x:(a*q1)+q0   NB. without x:
p0=.p1
```

```
q0=.q1
p1=.p2
q1=.q2
if.(s=rd)*.(t=_1^i) do. break. end.  NB. old (t=1)
i=.i+1
end.
 wr ' D =  ', ":d     NB. old none
 wr (p0n=.  # ": p0)   NB. H21.3.24
 wr (q0n=.  # ": q0)   NB. H21.3.25
 if. p0n > 100 do. wr p0n, '', q0n  end.
 p0 ,'', q0
)
```

```
     pchk =: 3 : 0   NB. 59 pchk 530 69
   :
   d=. x
   p0=. 0{ Y =. y
   q0=. 1{ Y
   x:  (p0^2) - d*q0^2
  )
```

J Homepage and Download

`http://www.jsoftware.com`

Script Download

`http://homepage3.nifty.com/asagaya_avenue`

APL&J APLAssosiation Workshop