

方程式 $X \cdot \tan X = A$ の解

中野 嘉弘 (札幌市、86 歳)

FAX 011-588-3354

e-mail yoshihiro@river.ocn.ne.jp

J 言語の勉強には、難問(?) 処理例が実践向きだと思う。

は し が き

「ニュートン法」で解けるかどうか? 怪しい難問の解法を話題にする。
最近、Yahoo 知恵袋、「物理学」の質問中の、ひねくれた問題と格闘した。
実は、「シッフの量子力学演習」中の難問であった。

1. 質 問

最近、見掛けた問題に、下記があった。

質問 1) 「連立方程式 $\xi^2 + \eta^2 = a^2 \cdots (1)$

$$\xi \cdot \tan \xi = \eta \cdots (2)$$

を解け。変数は ξ と η です。」(文献 1)

既に、二人の回答者が居て、私は三人目であった。私は、文字 ξ, η の代わりに、 x, y を用いた。

質問 2) 「方程式 $\tan x - x = \text{定数}$ 上の解 x を求めたい。

エクセル でグラフ的にやりたいが ……。」

これは似ている質問だ。

(これは、本稿では、最近の流行例としての紹介のみ。)

1a. 解 (主値)

与問題は、文字を変更すると、

$$x^2 + y^2 = a^2 \cdots (1), \quad x \cdot \tan x = y \cdots (2) \text{ で、}$$

(2) から y を (1) に代入すれば、

$$f(x) = x^2 + (x \cdot \tan x)^2 = a^2 \cdots (3)$$

の解を求める事になる。

$f(x) - a^2 = 0$ の解は数値解が常識。

$y = x \cdot \tan x$ は、 x については偶関数故、放物線的または U 字型図形である。
それと (1) 式の円との交点の x, y 座標が解である。

1 組見付かると、 \pm で個数は 4 倍になる。

解は主値とは限らない。 $x = \pi/2$ の倍数が特異点であるからだ。
ニュートン法はそのままでは、使い難い。質問 2) は、その為に出て来たものだ。
ニュートン・ラフソン法を楽に実行出来るように、 $\tan x$ のマクローラン展開を

使う。

そこで、 $\tan x$ には、使う(x^9 次まで)。

$$y = x \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots \right)$$

質問 1) 式(1) $x^2 + y^2 = a^2$ に代入・整理すると、 $f(x) = x^2 + (x \cdot \tan x)^2$
 $= x^2 + y^2 = x^2 + x^4 + \frac{2}{3}x^6 + \frac{17}{45}x^8 + \frac{62}{315}x^{10} +$
 $\frac{254}{4725}x^{12} + \frac{68}{4725}x^{14} + \frac{289}{99225}x^{16}$
 $= a^2 \dots (4)$

さて、 $y = x \cdot \tan x$ または展開式は x について偶関数。詳しくは、放物線的または U 字型図形である。それと(1)式の円との交点の x 、 y 座標が解である。それらは、1 組見付かると、 \pm で個数は 4 倍になる。

その計算の代表例を示す。 y は展開式、 $f(x)$ の【検算】は \tan 関数で行った。

● $a = 1$ の時の解。

$x = 0.739494$ 、それから (2)を用い、

$y = 0.67538$ 。

【検算】 $f(x) = 1.00185 \approx 1^2$ 。

◎ $a = 2$ の時の解。

$x = 1.03362$,

$y = 1.73543$ 。

【検算】 $f(x) = 4.0801 \approx 2^2$ 。

▲ $a = 3$ の時の解。

$x = 1.17012$,

$y = 2.76235$ 。

【検算】 $f(x) = 8.99995 \approx 3^2$ 。

■ $a = 4$ の時の解。

$x = 1.2523528$,

$y = 3.79889$ 。

【検算】 $f(x) = 15.9999 \approx 4^2$ 。

● $\pi/2 = 1.570796327\dots$ であるから、此処までの解は主値である。

解(交点)が主値外に出るのは、 $a = 12$ 以上らしい。

2. 主値外 の 解

Yahoo 知恵袋への私の回答の [補足編集 7.21] を再録する。

.....

ご質問の原点であり、別な回答者 coffee さまの量子論云々の原典、井上健監修「量子力学演習・シッフの問題」(文献 2)に気付いた。

$a^2 = 12$ 、主値内と主値外の 2 例、計 3 例について、もっと、計算精度を上げて見た。

1) 主値内 $0 < X < \pi/2$:

$$x_1 = 1.213031, y_1 = 3.24467,$$

$$\text{検算: } f(x) = 11.9993 = 12.$$

2) 主値外 $\pi/2 < X < \pi$:

$$x_2 = 2.2949, y_2 = -2.595,$$

$$\text{検算: } f(x) = 12.0006 = 12.$$

3) 主値外 $\pi < X < (3/2)\pi$:

$$x_3 = 3.372319, y_3 = 0.79219,$$

$$\text{検算: } f(x) = 12.0001 = 12.$$

(取り敢えず、声を挙げておきます。)

回答日時:2009/7/18 13:03:03

編集日時:2009/7/21 10:22:02

.....

【参考】別な回答者 coffee_quantum さんのコメント:(私へではありません!が)

(原質問は)シュレーディンガー方程式を解いて、有限の深さの井戸型ポテンシャル中の粒子のエネルギー準位でも求めてるんですか?

その方程式は解けませんよ。

解きたければ、 a を決めて数値的(2分法などで)に解くしかないでしょう。

シュレーディンガー方程式を解いているのなら、波動関数のおおよその形と、井戸の深さに対してエネルギー準位の数、ぐらいしか求まらないんじゃないですか。

ところで、

- > 肝心なことを忘れていました。
 - > 変数は ξ (グザイ)と η (イータ)です。
- って、何が肝心なんだかって感じです。

なお、別な回答者 jesuis さんののは答えになってるのかね?

θ が与えられてなければ、意味ないと思うけどね。

回答日時:2009/7/18 11:12:44

編集日時:2009/7/18 15:34:39

.....

(中々、手厳しいですね。)

3. むすび

中野を含め、皆様の回答は、本質的に「二分法」近似である。J 言語は、そこでも使い易い長所を持つ。しかし、 \tan 関数等々で、主値外を含めたニュートン・ラフソン法の例解が示されれば、有効であろう。

期待します。

文 献

1) Yahoo! Japan 知恵袋「物理学」2009/7/17 23:20:43 mjfnq242さん
http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1428401929

2) 井上 健 監修・三枝寿勝・瀬藤憲昭著「量子力学演習--シッフの問題解説」
吉岡書店、1971 第1刷、1989 第15刷、pp.380 の内、pp.20-22。