

Newton 法 難問解決

中野 嘉弘 (札幌市、86 歳)

FAX 011-588-3354

e-mail yoshihiro@river.ocn.ne.jp

J 言語の勉強には、難問？ 処理例が実践向きだと思う。

は し が き

6 月の JAPLA 研究会報告中に、志村氏の「ニュートン法の周辺」を見た (文献 1)。有益であった。敷衍する例を報告しよう。

最近、Yahoo 知恵袋、「数学」の質問中の、ひねくれた問題と格闘した。

質問「6 次方程式と、自然対数 \ln を含む連立方程式を X について解け。」

(文献 2)

$$-6.22X = 10^3 * \ln(15.07 - Y/6.61) \quad \dots (1)$$

$$Y = -0.0004X^6 + 0.0111X^5 - 0.1225X^4 + 0.6615X^3 - 1.8101X^2 + 2.7918X + 6.6667 \quad \dots (2)$$

(質問者は、近頃流行の EXCEL の利用か何かを期待しているらしい。)

.....

回答者は 2 名であったが、内、Mr. A の解答は、説明抜きの結果のみで、 $AX1 = 57.678$ と $AX2 = -862.634$ の 2 ケ。

対する私の解は、実数解については 2 ケで、それは
 $X1 = 12.7107429$ 、誤差 4.61558×10^{-6} で、と
 $X2 = -3.69021831$ 、誤差 5.55356×10^{-7} であった。

この回答後に、私の回答は、ひょっとしたら、上の (2) 式の左辺 Y の符号を反対の $-Y$ として、解いたのではあるまいか？ と心配になって、回答「補足」を試みたところ、この質問が、なんと「質問自体の取り消し」によって消失しているのではないか？

(このような事例が時々あって、残念ながら、もめることがある。)

そこで、せめて、JAPLA の猛者連の間で、検討をお願い出来たらと思い、話題とする次第である。

1. 連立方程式 の 解き方 (その 1)

目途を立てる為に、簡単化して、先ず (2) の左辺 (の Y) = 0 として計算

して見る。

0) if Y = 0 で J 言語流の計算: 次式の如く置く。

```
f1 =. #. & -0.0004 0.0111 -0.1225 0.6615 -1.8101 2.7918 6.6667
... (3)
```

さらに、計算 p. |. f1 から、根は

実根 10.0075 と $_1.13246$ の 2 ケ ... (4a)。
複素根 2 組の共役根で計 4 ケ。

7.89365j±4.63191 と 1.54384j±3.8953 ... (4b) 。

これは全く、J 言語の有り難味ですね。

1) 左辺の Y を (1) を用いて、変数 X で表す。

$Y = 6.61 * (15.07 - \ln(-6.22/10^3)*X)$ から、J 言語流には

$Y =. yex =. 99.6127 - 6.61 * ^.(_0.0062*X)$... (5)。

2) Y 項の目途:

2a) $yex\ 10.0075 \rightarrow 93.4004$ 、
 $yex\ _1.13246 \rightarrow 92.9561$ 。

2b) $yex\ 7.89365j\pm 4.63191 \rightarrow 93.321j\pm 0.180731$ 、
 $yex\ 1.54384j\pm 3.8953 \rightarrow 93.0676j\pm 0.158099$ 。

つまり、数値で 93 程度の食い違いが生ずる。
従って、f1 式 と yex 式を、同時に考慮せにやならん。

2. 連立方程式 の 解き方 (その 2)

ニュートン法のやり方は、志村氏の文献(1)に詳しいが、N. Thomson の名著
J: The Natural Language for Analytic Computing (文献 3) が便利である。

```
Newton =: 1 : ']-x%x D.1' (^:_ ) ("0) NB. for several vars ... (6)
```

○ 予備テスト: 複素根でも可能か? $x^2 + 1 = 0$ の求根、
 $fp2 =. #. & 1\ 0\ 1$ として、

```
fp2 Newton 0j2 -> 0j1、
fp2 Newton 1j_1 ->  $\_2.56492e\_26j\_1 \approx 0j\_1$ 、
確かに使える。
```

● $fn =. f1 + yex$ として、

○ $fn\ Newton\ 10 \rightarrow 12.7107$ (はしがき の解 X1)、
【検算】
 $fn\ 12.71074 \rightarrow 0.000226195$

```
fn 12.71075 -> _0.000155839
fn 12.710742959595955 -> 6.20403e_8
```

◎ fn Newton _1 -> _3.69022 (はしがき の解 x2)、
【検算】

```
fn _3.69022 -> _0.000134265
fn _3.6902183169 -> 4.90546e_9
```

以上、実根については、高精度で 2 根が求められた。
複素数根については、必要ならば、後述する。

3. 連立方程式 の 解き方 (その 3)

「はしがき」に述べたが、 y の符号が与問のままの時はどうか？

▲ fnm =. f1 - yex として、

```
△ fnm Newton 10 -> _7002.62
fnm Newton 100 -> _7002.62
fnm Newton _100 -> _7002.62
```

【検算】

```
fnm _7002.62 -> _1.21488e15
```

一体、こりゃ何じゃ！ 尤もらしい根は見えぬ。

■ 複素数根かも知れない！ テスト！

```
fnm 10j10 -> _921.827j_251.487
fnm 1j1 -> _84.462j0.412672
fnm _1j1 -> _87.229j7.64616
fnm 0.1j0.1 -> _86.0622j0.240205
fnm 0j0.1 -> _86.3179j0.27442
fnm 0j1 -> _84.6481j2.10042
fnm 0j_1 -> _84.6481j_2.10042
fnm 0 -> _86.336
```

```
□ fnm Newton 8j5 -> 4.80129j7.29808
fnm Newton 6j1 -> 4.80129j7.29808
fnm Newton 6j_1 -> 4.80129j_7.29808
```

収束点があるようだ。しかし、簡明では無いな。

▼ 再び、実根へ！

```
fnm Newton _1 -> _7002.62
fnm Newton _1.5 -> NaN error from Newton
この NaN error とは何じゃ？ しかし、
fnm Newton _1.49999999 -> _7002.62 であるから、
この _1.5 には、落とし穴があるようだ。
```

とにかく、正確に与問のままでは、困難のみ多くして、面白みは無い。
これは、諦めよう。

4. 連立方程式 の 解き方 (その 4)

第 2 節の fn (中野の問題変更)に戻り、複素数根を調べよう。

★ fn Newton 8j5 -> 8.90178j6.78938
【検算】 fn 8.90178j6.78938 -> 0.000158318j0.000430598 ≐ 0j0
 fn Newton 8j_5 -> 8.90178j_6.78938
【検算】 fn 8.90178j_6.78938 -> 0.000158318j_0.000430598 ≐ 0j_0

☆ fn Newton 2j4 -> 0.462962j6.49379
【検算】 fn 0.462962j6.49379 -> 4.17488e_5j1.70997e_5 ≐ 0j0
 fn Newton 2j_4 -> 0.462962j_6.49379
【検算】 fn 0.462962j_6.49379 -> 4.17488e_5j_1.70997e_5 ≐ 0j_0

即ち、共役複素数根は

8.90178j±6.78938 と

0.462962j±6.49379 との 4 根である。

先頭節で述べた 2 実根

12.7107429 と -3.69021831 と共に

総計 6 根 が求まった。めでたし、めでたし！

5. む す び

ニュートン法の便利さを体感した。Yahoo 知恵袋 関係としては、冒頭「はしがき」に述べた如く、変数 Y の符号を負に換えて出題したとすれば、解き易く、楽しめる数学の問題になって居たであろうと確信出来た。些少の事でも、気が付けば、教育的になる。

文 献

- 1) 志村正人:「ニュートン法の周辺」JAPLA 2009/6/24/ pp.7
- 2) Yahoo 知恵袋「数学」hopper5963 さん 質問 2009/7/9/ 21:07:52
 補足 22:18:16
 この質問は、消得て仕舞ったので、同じ趣きの質問を、別途、下記の如く再提出した。
- 2a) nakanochurch さん 質問日時 2009/7/11/ 12:51:27
 補足 同日 21:43:12

http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1428173394

- 3) N. Thomson: 'J: The Natural Language for Analytic Computing'
 May 2001, pp.207 の中、pp.203-206