

# 群論演習と J (その 1)

## Yahoo 知恵袋の問答から

中野嘉弘  
(86 歳、札幌市南区)

2009 年 4 月 23 日

### 目次

1	はしがき	2
2	1 次、2 次対称群 $S_1, S_2$	2
3	3 次交代群 $A_3$	3
4	Klein の四元群 $V_4$	4
5	Klein の四元群 $V_4$ 続き	5
6	3 次対称群 $S_3$	8
7	正規部分群 (不変部分群)	14
8	むすび	14
9	文献	15

\*1

### 概要

J 言語で群論の計算を楽しむ例をしめそう。

## 1 はしがき

行列・配列処理に最適な J 言語を、群論 Group Theory に、適用しない手は無かろう。

JAPLA の会友から、既に、数編の報告が為されている。 例えば

- 西川利男 : 「組合せ数学 Combinatorics への J のツール - 並べ替え (順列、置換) の関数 A.

---

\*1 FAX 011-588-3354 E-mail yoshihiriver.ocn.ne.jp

と C.」(文献 1)

- 志村正人：「Code 変換 J and Group (その 0)」
- 同「Code 変換 J and Group (その 1)」(文献 2)
- 中野・西川・山下「群論演習 と J(その 0)、志村論文を 応援して」(文献 3)

いずれも、8 ~ 4 年も昔の事である。その後、中野は「数独」の問題作成法の一案として、取り上げた記憶がある。

最近、中野は Yahoo 知恵袋の問答の中で、「シロー Sylow 群」の問題で、手こずって悔しい思いをしたので、久し振りに、再トライしてみた。若干、楽しめたので、会友の皆様を誘い入れたい。

例題を紹介すれば、

問題 「位数 175 の群はアーベル群である」(2009/3/18) 残念!

[http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question\\_detail/q1024201520](http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1024201520)

問題 「4 次対称群  $S_4$  と 5 次対称群  $S_5$  でのシロー 2 部分群とシロー 3 部分群を求めよ」(2009/3/12) 中野 Best Answer

[http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question\\_detail/q1324061183](http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1324061183)

問題 「群にあたるものを選べ。

1. 対称群  $S_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ )
2. 交代群  $A_n$  ( $n = 3, 4$ )
3. クラインの四元群  $V_4$  ('09/4/16) 中野 Best

[http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question\\_detail/q1125219831](http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1125219831)

## 2 1 次、2 次対称群 $S_1, S_2$

2 次置換群から始めよう。

数の集合を  $n_2 = \{0, 1\}$  としよう。記号  $=$  は代入の意味。

数は  $(1 \text{ と } 2)$  でも良いが、成る可く簡単にと、上の如くした。

これを置換すれば  $p_1 = \{1, 0\}$  がえられる。何もせぬのも置換の一つとすれば  $p_0 = \{0, 1\}$  である。これら 2 つの操作の集合を  $S_2$  と名付ける。これが群の条件を充たす事を示そう。

置換の操作は、指定順序での抽出と考えても同じ事である。説明には、配列・行列の処理を得意とする J 言語を適宜用いると便利である。<sup>\*2</sup> 下の記号  $\{$  は Find、発見抽出の意味。

$p_1 \{ n_2$  から  $1, 0$  が得られるので、 $p_1 = p_1 \{ n_2$  となる。

記号  $=$  は等号である。逆に、 $p_1 \{ p_1 \{ n_2$  から  $0, 1$  が得られるので、今度は  $p_1^2 = p_0$  となる。

$p_0$  は不動の置換(何もせぬ)なので、数学の掛け算の 1 相当と見て、単元、単位操作と考え、記号  $I, i, E, e$  等で示される事が多い ( $E, e$  はドイツ語の Einheit)。単元と呼ばれる。

そこで、 $p_0 = I, p = p_1$  と書き直すと、内容的に  $S_2 = (I, p)$  である。 $S_2$  は、群の条件を充たしている。0 元(要素)の結合の操作が定義されている(置換、抽出)

結合したものが、同じ集合内に含まれる。

---

<sup>\*2</sup> J 言語はカナダ国原産、無料で DL 可能。

1. 単元  $I$  がある。
2. 各元に、その逆元がある。(今は  $p$  自身が  $p$  の逆元、 $I$  は  $I$  自身の逆元。)

かくて、集合  $S_2$  は 2 次の (置換) 群である。

$I = (0\ 1), p = (1\ 0)$  は互換でもあり、しかも、それぞれ奇数ケである。もしも、偶数ケの互換の積であれば、交代群と呼ばれるものだが、今はそうでは無い。(強いて探せば、単元  $I$  では奇数ケの積でも、偶数ケの積でも同じであるから、2 次交代群は単元のみから成る。) これは、2 次対称群  $S_2$  と呼ばれる。

### 3 3 次交代群 $A_3$

まずは 3 次交代群の例で、群表を作って見よう。

$n = .\ 1, 2, 3$  とします。 $.\$  は代入の記号の意味。

3 次の順列 (permutation) の  $3!$  即ち 6 ケのリストの中、自明な単元  $i = .\ 1\ 2\ 3$  の他、 $s = .\ 2\ 3\ 1$ ,  $t = .\ 3\ 1\ 2$  が、互換の積にならぬので、偶置換であり、交代群の元になれる。

群操作の意味は、置換以外にも別解釈、例えば、演算  $s\ n$  で、数の集合  $n$  から元素を抽出する事だとも可能である。すると、 $s\ n$  の結果は  $2\ 3\ 1$  です。どちらでも同じ事ですね。

群である事を示す為、群表を作ろう。

群表の行列  $m\ i\ s\ t = .\ 3\ 3\ \$ (i, s, t \text{ から成る } 3 \text{ 行 } 3 \text{ 列})$  である。元  $i$  と  $i, s, t$  の演算の組合わせ  $(i\ i), (i\ s), (i\ t)$  は実は単一演算  $i, s, t$  を作用させたもの  $(i, s, t)$  の組と同じです。数集合  $n$  に作用させると、結果は、それぞれ  $(1\ 2\ 3), (2\ 3\ 1), (3\ 1\ 2)$  ですから、

次に、元  $s$  と  $i, s, t$  の演算の組合わせを考える。

$(s\ i)$  は  $s$  と同じ。 $(s\ s)$  は  $[2\ 3\ 1][2\ 3\ 1]$  故  $[3\ 1\ 2]$  即ち  $t$  と同じ。 $(s\ t)$  は  $[2\ 3\ 1][3\ 1\ 2]$  故  $[1\ 2\ 3]$ 、即ち  $i$  と同じです。結局  $(s, t, i)$  となる。

元素  $t$  の場合も同様にして、全体では行列

$m\ i\ s\ t = .\ 3\ 3\ \$ (i, s, t), (s, t, i), (t, i, s)$  が得られる。

これが、3 次交代群の群表

$i, s, t$   
 $s, t, i$   
 $t, i, s$

です。

或いは、リストの数字を用いて群表行列は

$[1\ 2\ 3][2\ 3\ 1][3\ 1\ 2]$   
 $[2\ 3\ 1][3\ 1\ 2][1\ 2\ 3]$   
 $[3\ 1\ 2][1\ 2\ 3][2\ 3\ 1]$

でも良い。

(数集合  $n$  の中に 0 を含めて、順位の先頭を 1 で無くても 0 から勘定することにしても、実は同じ事です。)

これら群表から、群の定義を充たしていることは容易に判ります。これら群表を簡単に作る為の最適の言語もあります。カナダ国原産の「行列処理用」言語」です。簡単に DL して学習出来ます。

次は、サイズの大きくなる順番に、クラインの四元群、そして3次対称群、さらに4次対称群等々で例示すれば良いのでしょうか？

## 4 Klein の四元群 V4

**Klein の四元群 V4 :**

J 言語 と 0 オリジンを使う。

単元  $i = . 0 1 2 3$ 、他の元は  $a = . 1 0 3 2$ 、

$b = . 2 3 0 1$ 、 $c = . 3 2 1 0$  が既に有名である。

群表を作る。J 言語の演算をするが、余り気にしないで！単元  $i$  との組み合わせは、先ず

$A = . i ; (a \{ n \}), (b \{ n \}), (c \{ n \})$  と置いて

$i \{ A \}$  から | 0 1 2 3 | 1 0 3 2 | 2 3 0 1 | 3 2 1 0 |  
 $a \{ A \}$  から | 1 0 3 2 | 0 1 2 3 | 3 2 1 0 | 2 3 0 1 |  
 $b \{ A \}$  から | 2 3 0 1 | 3 2 1 0 | 0 1 2 3 | 1 0 3 2 |  
 $c \{ A \}$  から | 3 2 1 0 | 2 3 0 1 | 1 0 3 2 | 0 1 2 3 |

群表  $M44 = . 4 4 \$ (i\{A\}), (a\{A\}), (b\{A\}), (c\{A\})$  は

0 1 2 3	1 0 3 2	2 3 0 1	3 2 1 0
1 0 3 2	0 1 2 3	3 2 1 0	2 3 0 1
2 3 0 1	3 2 1 0	0 1 2 3	1 0 3 2
3 2 1 0	2 3 0 1	1 0 3 2	0 1 2 3

$M44i = . M44 = \langle i \text{ から}$

1 0 0 0  
 0 1 0 0  
 0 0 1 0  
 0 0 0 1

$M44a = . M44 = \langle a$

$M44b = . M44 = \langle b$

$M44c = . M44 = \langle c$

0 0 0 1  
 0 0 1 0  
 0 1 0 0  
 1 0 0 0

]  $M44m = . (M44i) + (2 * M44a) + (3 * M44b) + (4 * M44c)$

```

1 2 3 4
2 1 4 3
3 4 1 2
4 3 2 1

```

] M44m1 =. M44m - 1

```

0 1 2 3
1 0 3 2
2 3 0 1
3 2 1 0

```

M44m1 { 'iabc' から

```

iabc
aicb
bcia
cbai

```

かくて Klein 四元群 V4 の群表が得られたので、群を為す。

## 5 Klein の四元群 V4 続き

**Klein の Vier Gruppe (2) :**

4つの2次行列  $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  
 $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  は4元群を為す事を示せ。  
 横井英夫・はだ野敏博「代数学演習 [新訂版]」2003.6 (文献 8)

NB. 2009. 4.19. pm.11:00

```

E=. 2 2 $ 1 0 0 1
B=. 2 2 $ _1 0 0 1
C=. 2 2 $ _1 0 0 _1
A=. 2 2 $ 1 0 0 _1

```

E

1 0

0 1

EABC=. E, A, B, C

]BT=. E;A;B;C

```

1 0 1 0 _1 0 _1 0
0 1 0 _1 0 1 0 _1

```

(<E) +/- . \* each BT

```
1 0 1 0 _1 0 _1 0
0 1 0 _1 0 1 0 _1
```

]ET=. (<E) +/- . \* each BT

```
1 0 1 0 _1 0 _1 0
0 1 0 _1 0 1 0 _1
```

ET e. E

0

ET i. E

4 4

4 4

ET e. <E

1 0 0 0

ET i. <E

0

ET = <E

1 0 0 0

]AT=. (<A) +/- . \* each BT

```
1 0 1 0 _1 0 _1 0
0 _1 0 1 0 _1 0 1
```

]BT=. (<B) +/- . \* each BXT=. BT

```
_1 0 _1 0 1 0 1 0
0 1 0 _1 0 1 0 _1
```

BXT = <B

0 0 1 0

]CT=. (<C)+/ . \* each BXT

```
_1 0 _1 0 1 0 1 0
0 _1 0 1 0 _1 0 1
```

BXT = <C

```
0 0 0 1
```

BXT

```
1 0 1 0 _1 0 _1 0
0 1 0 _1 0 1 0 _1
```

CT

```
_1 0 _1 0 1 0 1 0
0 _1 0 1 0 _1 0 1
```

BXT = CT

```
0 0 0 0
```

BXT e. CT

```
1 1 1 1
```

BXT

```
1 0 1 0 _1 0 _1 0
0 1 0 _1 0 1 0 _1
```

CT

```
_1 0 _1 0 1 0 1 0
0 _1 0 1 0 _1 0 1
```

BXT i. CT

```
3 2 1 0
```

BXT i. BT

```
2 3 0 1
```

BXT i. AT

```
1 0 3 2
```

```

BXT i. ET
0 1 2 3

]TB4 =. 4 4 $ 0 1 2 3 1 0 3 2 2 3 0 1 3 2 1 0
0 1 2 3
1 0 3 2
2 3 0 1
3 2 1 0

```

```

TB4 { 'EABC'
EABC
AECE
BCEA
CBAE

```

## 6 3次対称群 S3

次は3次対称群 S3, 4次対称群 S4 に進む。  
 計算は同好だが、少々、長くなりますね。  
 群表は、S3で6x6行列、S4で24x24行列か!?

```

3次対称群 S3:
]plst3=. plist 3 から群の元は以下の6ヶである。

0 1 2
0 2 1
1 0 2
1 2 0
2 0 1
2 1 0

```

単元 I =. 0 1 2 とし、他の元、a,b,c,d,e は上表から順次に採る。群表作成の準備として、前例同様に

```

B =. 0 1 2 0 2 1 1 0 2 1 2 0 2 0 1 2 1 0

```

として、

```

M66 =.

```

```

0 1 2 0 2 1 1 0 2 1 2 0 2 0 1 2 1 0
0 2 1 0 1 2 1 2 0 1 0 2 2 1 0 2 0 1
1 0 2 2 0 1 0 1 2 2 1 0 0 2 1 1 2 0

```

```

1 2 0  2 1 0  0 2 1  2 0 1  0 1 2  1 0 2
2 0 1  1 0 2  2 1 0  0 1 2  1 2 0  0 2 1
2 1 0  1 2 0  2 0 1  0 2 1  1 0 2  0 1 2

```

結局、

```

]M66m1 =. M66m - 1
0 1 2 3 4 5
1 0 3 2 5 4
2 4 0 5 1 3
3 5 1 4 0 2
4 2 5 0 3 1
5 3 4 1 2 0

```

そして

```

M66m1 { 'Iabcde'
Iabcde
aIcbde
bdIeac
ceadIb
dbeIca
ecdabI

```

この最後が、求める  $S_3$  の群表である。元数は6。それが合理的に得られたから群を為すと云える。

次の  $S_4$  では元数が24であるから、さらに手間が掛かろうね。おまかせしたい。

$S_3$  の別件：

```
S3 =. {e, (1 2), (2 3), (3 1), (1 2 3), (1 3 2)}
```

```

]plst3=. plist 3
0 1 2
0 2 1
1 0 2
1 2 0
2 0 1
2 1 0

```

```

]plst31=. plst3 + 1
1 2 3
1 3 2
2 1 3
2 3 1
3 1 2

```

3 2 1

C. 0{plst31

0 1 2 3

C. 1{plst31

0 1 3 2

u <;. 1 (plst31)

1 2 3 1 3 2 2 1 3 2 3 1 3 1 2 3 2 1

{}. & C.) each u <;. 2 (plst31)

1 2 3 1 3 2 2 1 3 3 1 2 3 2 1 2 3 1

> each {}. & C.) each u <;. 2 (plst31)

1 1 0 2 1 3 1 2 3 2 1 2 0

2 3 2 3 0 3 1

3

共役類

{(1 2 3), (1 3 2)} or {(2 3 1), (2 1 3)} or (1 2 0), (2 0 1)}

p30 =. (3 { plst3)

p40 =. (4 { plst3)

p30

1 2 0

p40

2 0 1

p40 { p30 { n0

0 1 2

p30 { p40 { n0

0 1 2

p40{ p30 = p30 { p40 or p30 = p40 { p30 { (p40)^-1

即ち共役類。

#### 4 次交代群

```
plst4=. plist 4
```

```
$ plst4  
24 4
```

```
6 {. plst4  
0 1 2 3
```

```
. . . .  
0 3 2 1
```

```
plst41=. plst4 + 1  
6 {. plst41  
1 2 3 4  
1 2 4 3  
1 3 2 4  
1 3 4 2  
1 4 2 3  
1 4 3 2
```

```
]u=. 24 # 1  
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

```
up41 =. u <;. 1 (plst41)
```

```
$ up41  
24
```

```
6 {. up41
```

```
1 2 3 4 1 2 4 3 1 3 2 4 1 3 4 2 1 4 2 3 1 4 3 2
```

```
cup61=. (}. & C.) each up41  
$ cup61  
24
```

```
6 {. cup61
```

1 2 3 4      1 2 4 3      1 3 2 4      1 4 2 3      1 4 3 2      1  
3 4 2

4 6 \$ cup61

1 2 3 4      1 2 4 3      1 3 2 4      1 4 2 3      1 4 3 2      1  
3 4 2

2 1 3 4      2 1 4 3      3 1 2 4      4 1 2 3      4 3 1 2      3 4 1 2

3 2 1 4      4 2 1 3      2 3 1 4      2 4 1 3      3 1 4 2      4 1 3 2

4 3 2 1      3 4 2 1      2 4 3 1      2 3 4 1      4 2 3 1      3 2 4 1

]i=. > 0 {cup61

1 2 3 4

]a1=. > 3 {cup61

1 4 2 3

]a2=. > 4 {cup61

1 4 3 2

]a3=. > 8 {cup61

3 1 2 4

]a4=. > 11 {cup61

3 4 1 2

]a5=. > 12 {cup61

3 2 1 4

]a6=. > 15 {cup61

2 4 1 3

]a7=. > 19 {cup61

3 4 2 1

]a8=. > 20 {cup61

2 4 3 1

]a9=. > 7 {cup61

2 1 4 3

]a10=. > 16 {cup61

3 1 4 2

]a11=. > 23 {cup61

3 2 4 1

(0{plst41)

1 2 3 4

N61=(0{plst41),(3 {plst41),(4 {plst41),(8{plst41),(11 {plst41),(12 {plst41)

N61=.N61,(15{plst41),(19 {plst41),(20 {plst41),(7{plst41),(16 {plst41),(23 {plst41)

\$ N61

48

q:48

2 2 2 2 3

]A4 =. 12 4 \$ N61

1 2 3 4

1 3 4 2

1 4 2 3

2 3 1 4  
 2 4 3 1  
 3 1 2 4  
 3 2 4 1  
 4 1 3 2  
 4 2 1 3  
 2 1 4 3  
 3 4 1 2  
 4 3 2 1

## 7 正規部分群 (不変部分群)

岩波講座 応用数学 11 [基礎 8] 群と表現 : 江沢 洋・島 和久 p.14 (文献 7) に面白い記述がある。

**Normal Sub-Group**, 正規部分群、不変部分群、**Invariant Sub-Group**

$$\begin{aligned}
 N &= \{ i, a_9, a_{10}, a_{11} \\
 &= \{ |1|2|3|4|, |2\ 1|4\ 3|, |3\ 1|4\ 2|, |3\ 2|4\ 1| \}
 \end{aligned}$$

4 次の場合に限り、交代群 (対称群) は正規部分群を持つと云われているが、その例である。

本によっては、一般的に次のようにも書く。  $N = I, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)$

単群

正規部分群を持たない群を単純 (Simple) と云う。

交換子群と群  $G$  から正規部分群を作る方法に交換子 (commutator) 法がある。かくして出来る群を交換子群と云う。 段々、尤もらしくなってきた。 次回にゆっくりやろう。

## 8 むすび

配列処理の J 言語を、その特徴を活かして使う例題に巡り会った気分である。

少々難物だが、皆様のお知恵を拝借しながら、折角、楽しむことにしよう。

## 9 文献

- 西川利男 「組合わせ数学 Combinatorics への J のツール - 並べ替え (順列、置換) の関数 A. と C.」 JAPLA 2001/6/23 pp.7
- 志村正人 「Code 変換 J and Group (その 0)」 JAPLA 2005/9/21 pp.5
- -a)々 「Code 変換 J and Group (その 1)」 JAPLA 2005/10/26 pp.3
- 中野・西川・山下 「群論演習と J (その 0)、志村論文を応援して」 Proceedings JAPLA 2005

- [http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question\\_detail/q1024201520](http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1024201520)
- [http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question\\_detail/q1324061183](http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1324061183)
- [http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question\\_detail/q1125219831](http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1125219831)
- 江沢 洋・島 和久:「 応用数学 11 [基礎 8] 群と表現」 岩波講座
- 横井英夫・はだ野敏博「代数学演習 [新訂版]」サイエンス社、2003.6 p.32