ピカールの逐次近似法

Shimura Masato
JCD02773@nifty.ne.jp

2009 年 4 月 10 日

目次

概要

ピカールの反復法 *Picard iteration or the method of successive approximation*

1 Picard iteratiopn

A　生粋のパリジャン, ピカールの優雅な微分方程式の解法である。*Peterson and Sochacki* に丁寧な解説がある。次の 3 の Example は P/S による。

Z　積分しながらテーラー展開に持ち込む方法である。初期値も定まり**積分定数**が出てこないのですっきりする。

積分方程式	$y(x) = y_0 + \int_{x0}^{x} f(t, y(t))dt$
初項	$p_0(x) = y_0$
第 1 項	$p_1(x) = y_0 + \int_{x0}^{x} f(t, p_0(t))dt = y_0 + \int_{x0}^{x} f(t, y_0)dt$
第 2 項	$p_2(x) = y_0 + \int_{x0}^{x} f(t, p_1(t))dt$
一般項	$p_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x0}^{x} f(t, p_k(t))dt$

EXAMPLE　$y' = y, \quad y(0) = 1$

$$y(x) = 1 + \int_0^x f(t, y(t))dt = 1 + \int_0^x y(t)dt$$

$$
\begin{array}{c|llll}
0 & p_0 x = y_0 & p_0(x_0) = y(x_0) = y_0 & & = 1 \\
1 & p_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, p_0(t))dt & = 1 + \int_0^x f(t, 1)dt & = 1 + \int_0^x 1dt & = 1 + x \\
2 & p_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, p_1(t))dt & = 1 + \int_0^x f(t, 1 + t)dt & = 1 + \int_0^x (1 + t)dt & = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \\
3 & p_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, p_2(t))dt & = 1 + \int_0^x f(t, 1 + t + \frac{1}{2}t^2)dt & = 1 + \int_0^x (1 + t + \frac{1}{2}t^2)dt & = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \\
k & p_k(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 & + \cdots + \frac{1}{k}x^k & = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}x^n &
\end{array}
$$

A　初期値には初項を充て、後ろから 2 つ目の列の $\int$ の中を積分する。$1+t$ を積分すると $x+\frac{x^2}{2}$ に。（定積分で $\int_0^x$ の左端が 0 なので t が x に置き換わるのみ。）

Z　多項式では初項や次項が大枠を決めて高周波数の高次の項は微調整に回る。テーラー展開でも同じような振舞をする。

A　Example1 は初期値が 1 であるので e のテーラー展開と同じ

Z　積分分方程式　$y(x) = 1 + \int_0^x f(t, y(t))dt = 1 + \int_0^x y(t)dt$ のデザインが大切で失敗すると抽象画になる。

```
plot 1 2 3 4 5 6 ; '^&1 2 3 4 5 6 * %&!'
```

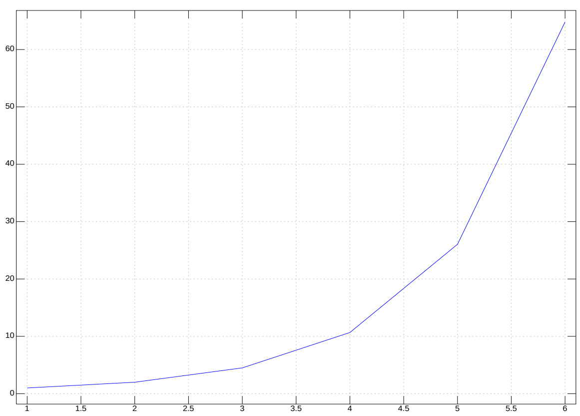

図 1　Ex1

■*Charles Emile Picard*　(1856-1941) Paris 生まれ父は絹工場の支配人であったが 1870 年のフランス · プロシャ戦争のパリ包囲戦で亡くなった。母は医者の娘であったが働きに出た。ピカールはギリシャ語とラテン語に優れ、· ナポレオンの庇護したリセ（中等学校）で学んだ。数学は最初は得意でなかったが数学の本を読み突然目覚めた。エコール · ノルマルに進み、1871 年に教授資格を得てパリ大学で教えた後、トウールズ大学の教授に就任した。1881 年にパリに戻り、エコール · ノルマルの教授や若くしてアカデミーの数学部門のメンバーになり、エルミート（高名な数学者）の娘と結婚した。（後にパリ大学へ移る。）この頃既にピカールの名で知られる 2 の定理を証明していた。数学上の多くの業績と名誉を得、教育者として 1 万人に上るエンジニアに教えた。

EXAMPLE $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$

$f(x, y) = 1 + y^2$

$y(x) = 1 + \int_0^x f(t, y(t))dt = 1 + \int_0^x f(1 + y(t)^2)dt$

$$
\begin{array}{c|l}
0 & p_0 x = y_0 = 0 \\
1 & p_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, p_0(t))dt = 0 + \int_0^x f(t,0)dt = \int_0^x 1dt = x \\
2 & p_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, p_1(t))dt = 0 + \int_0^x f(t,t)dt = \int_0^x (1 + t^2)dt = x + \frac{1}{3}x^3 \\
3 & p_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, p_2(t))dt = 0 + \int_0^x f(t, t + \frac{1}{3}t^3)dt = \int_0^x (1 + (t + \frac{1}{3}t^3)^2)dt \\
 & = \int (1 + t^2 + \frac{2}{3}t^4 + \frac{1}{9}t^6)dt = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7 \\
4 & p_4(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, p_3(t))dt = 0 + \int_0^x f(t, t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{1}{63}t^7)dt \\
 & = \int_0^x (1 + (t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{1}{63}t^7)^2)dt = \int_0^x (1 + t^2 + \frac{2}{3}t^4 + \frac{17}{45}t^6 + \frac{38}{315}t^8 + \frac{134}{4725}t^{10} + \frac{4}{945}t^{12} + \frac{1}{3969}t^{14})dt \\
 & = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{38}{2835}x^9 + \frac{134}{51975}x^{11} + \frac{4}{12285}x^{13} + \frac{1}{59535}x^{15}
\end{array}
$$

A　計算と積分の練習によい例題だ。$\int_0^x f(1 + y(t)^2)dt$ に注目する。

Z　大掛かりなので部分的な計算スクリプトを作成しよう。

係数と乗数を分ける。
$(t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{1}{63}t^7)^2$
右引数に^2 部分をとる。
	`   a`
	`1 1r3 2r15 1r63`
	
	`a1=.1 1r3 2r15 1r63; 1 3 5 7`

外積	`   p0_sub a`
	`   1   1r3  2r15   1r63`
	` 1r3   1r9  2r45  1r189`
	`2r15  2r45 4r225  2r945`
	`1r63 1r189 2r945 1r3969`

+//. 右上左下の対角に足し込む	`p1_sub a` `1 2r3 17r45 38r315 134r4725 4r945 1r3969`

$\int ((f(t))^2)dt$ 部分の積分	`picard01 a1`
	分子　分母　積分済
	`  1      3   3`
	`  2     15   5`
	` 17    315   7`
	` 38   2835   9`
	`134  51975  11`
	`  4  12285  13`
	`  1  59535  15`

Example 3

$y' = x^2 + y^2$ 初期値 $y(-1) = 0$

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$y(x) = 0 + \int_{-1}^{x} f(t, y(t))dt = 0 + \int_{-1}^{x} t^2 + y(t)^2 dt$

$$\begin{array}{c|lll} 0 & p_0 x = y_{-1} = 0 & & \\ 1 & p_1(x) = 0 + \int_{-1}^{x} f(t,0)dt & = 0 + \int_{-1}^{x} ft^2 dt & = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x^3 \\ 2 & p_2(x) = 0 + \int_{-1}^{x} f(t, (\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t^3)dt & = \int_{-1}^{x} (t^2 + (\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t^3)^2)dt & = \frac{17}{42} + \frac{1}{9}x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^4 + \frac{1}{63}x^7 \end{array}$$

```
 _1 integral_f  (1;2) picard0 1r3 1r3;0 3

17r42 0
  1r9 1
  1r3 3
 1r18 4
 1r63 7
```

integral_f の左引数は定積分の始点 -1 （0 の場合は *integral_f* は用いなくて良い。）

*picard*0 の左引数 (1;2) は t^2

右引数 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t^3$

A 初期値が -1 なので定積分の区間が $\int_{-1}^{x}$ になり、$-\dfrac{1}{3}$ や $-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{63}=-\dfrac{17}{42}$ が現れる。[*1]

Z セミオートマチックだから、式を入れて後は宜しくとはなっていない

1.1 Script

```
NB. Picard iteration
NB.Usage: *   (1;2)  picard0 1r3 1r3;0 3
NB.Usage: *_1 integral_f  (1;2)  picard0 1r3 1r3;0 3
NB. ---utils--------------------
diag=:(<0 1)&|:
pp=: +//.@(*/)          NB. study aid
NB. ---------------------
p0_sub=:3 : '*/~y'      NB. outer products
p1_sub=:3 : '+//. p0_sub y' NB. */ -> select oblic sub
p2_sub=: ,@(~./.)@(+/~) NB. outer products of plus ->select sume
NB. ------------------------------
picard01=: 3 : 0
NB. calc and integral fn ^2
NB. a=. 1 1r3 2r15 1r63; 1 3 5 7
'A0 B0'=. y
TMP2=: (2 x: p1_sub A0),. B1=. p2_sub B0
(>: B1),.~(({."1 TMP2),.(1{"1 TMP2) * >: {:"1 TMP2) NB. integral
)

picard0=: 4 : 0
NB. (1;2) picard0 1r3 1r3;0 3
'A0 B0'=. y
'C0 D0'=: x
TMP2=: (2 x: p1_sub A0),. B1=. p2_sub B0
TMP21=: TMP2, (2 x: C0), D0 NB. add x
TMP22=: (/:{:"1 TMP21){TMP21 NB. sort by order
integral_sub0 TMP22
)
```

[*1] (– – 1/3), (– – 17/42)

```
integral_sub0=: 3 : '(>:{:"1 y),.~(({."1 y),.(1{"1 y)*>:{:"1 y)'
integral_f=: 4 : 0
NB. Usage:_1 integral_f  (1;2) picard0 1r3 1r3;0 3
TEISUU=.- +/ (TMP1=._2 x: 2{."1 y) * _1 ^ {:"1 y
(TEISUU,0) ,TMP1,.{:"1 y
)
```

2 多項式

3 References

Peterson/Sochacki [Linear Algebra and Differential Equation] Addison-Wesley 2002
佐野　理 [キーポイント微分方程式] 1993 岩波書店

J Grammer

和の外積 `+/~ 1 3 5 7`

```
   1  3  5  7
  ----------
 1|2  4  6  8
 3|4  6  8 10
 5|6  8 10 12
 7|8 10 12 14
```

右上左下の対角で同じものの代表を選ぶ `; ~./. +/~ 1 3 5 7`

```
 2 4 6 8 10 12 14
```