エクゾチックオプション価格のシミュレーション　その１０
－バリアーオプションの価格式 (5) －

Numerical Tests on the Exotic Option Pricing Models － 10 －
The Barrier Option Pricing Model(5)
(バリアープットオプション　Barrier Put Option)

(株) 竹内ハガネ商行
竹内寿一郎

9．Down and Out Put (B ≤ K) の場合の評価式

このケースは以前バリアーオプションを分類したときの No.11 に相当し [3]、バリアー価格 (B) がスポット価格より小さい (これを Down という) とき、ノックアウト ($S(T)$ がバリアーに到達した時点でオプションが消滅する) で、プットオプション (売る権利の行使)、行使価格 (K) がバリアー価格 (B) より大きい場合である。たとえば、ここ 9 節では次のような取引である。

原資産	ドル円為替レート
満期	6ヶ月後
スポット価格	120 円
バリアー価格	100 円
行使価格	110 円
オプション	ノックアウトプットオプション

現在の円の対ドル為替レートが 120 円のときの、行使価格 110 円のプットオプションであるが、オプション期間の 6ヶ月以内に為替レートが、1 度でも 100 円以下の価格をつけたときこのオプションは消滅してしまう、ということである。そういうときの評価式を求めることになる。

本シリーズにおいてこの 9 節以前では、オプションはほとんど全てコールオプション (買う権利の行使) の話であったが、これ以降は、出てくるオプションは全てプットオプションとなる。そこでプットオプションの利得の計算を詳細に見てゆくことにする。

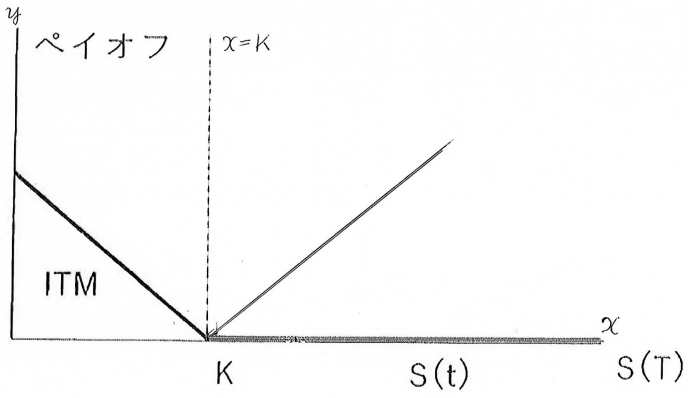

図 1．プットオプションとコールオプションのペイオフ

プットオプションとは「満期 T にスポット価格 $S(T)$ が行使価格 K 以下のとき、資産を K で売る権利を行使する」ので、そのときのペイオフは図 1. の右下がりで K からはゼロになる折れ線のようになり、式で表現すればこのときのキャッシュフローは $max(K-S(T),0)$ と書け、デジタルオプションからアセットオプションを引いた正の部分 (In The Money、利得が生ずる) の期待値であるといえる。コールオプションとプットオプションのペイオフのグラフを同時に表示するとすれば、縦軸 y をペイオフ、横軸 x を満期の価格 $S(T)$ としたとき、行使価格 K を通る y 軸に平行な $x=K$ に対する線対称な折れ線で描けるともいえる。

さてここで標題のプットオプションの評価額について考えて行こう。

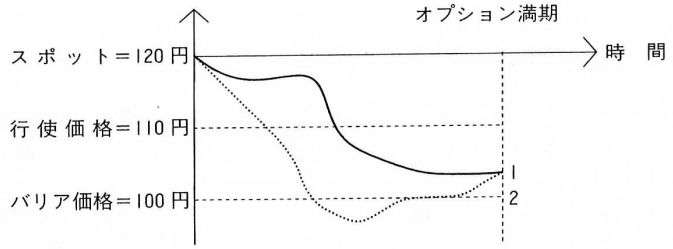

図 2. Down のとき、満期に価格が行使価格以下、かつバリアー価格以上になる 2 つの経路
(スポット価格 120 円、行使価格 110 円、バリアー価格 100 円)

バリアー価格を 100 円として、次の 2 つの経路を考える

[1] 満期 T に価格がバリアー価格 100 円以上、かつ行使価格 110 円以下になる場合 (ここでは過去の経路は一切問わない)、

[2] オプション期間中に一度はバリアー価格 100 円以下となり、その後満期 T では価格が 100 円以上、かつ 110 円以下となる。

オプション期間中に一度もバリアー価格を下回らず、オプション満期 T に価格 $S(T)$ が、行使価格 K より小さく、バリアー価格 B より大きな値になっているとき、キャッシュフロー $K-S(T)$ が得られる評価額を P(これが求める評価額)、経路 [1] での価格を P_I、経路 [2] での価格を P_{II} で表すとすると、

$$P = P_I - P_{II}$$

と書くことができる。

満期時に $B \leq S(T) \leq K$ なる条件が付くのは、$S(T)$ が行使価格より大であればアウトオブザマネー (OTM：利得はゼロ) になってしまうし、バリアー価格以下であればオプションが消滅するからである。

このとき、経路 [2] は経路 [1] の部分であり、バリアーに到達すること無く価格 S(T) が行使価格 K 以下、バリア価格以上になる確率は [1] の確率から [2] の確率を引けばよい。すなわち、このときの評価額は [1] のときの評価額 P_I から [2] のときの評価額 P_{II} を引けば良いことになる。

そこでまず、満期に価格が行使価格以下、バリアー価格以上なるとき、キャッシュフロー $K-S(T)$ を得るオプションの評価額 P_I を計算してみよう。

P_1：満期 T で価格が行使価格以下のときの価格

P_2：満期 T で価格がバリアー価格以下のときの価格
とすると P_I は
$P_I = P_1 - P_2$
で表される。

P_1 の確率は満期に価格が行使価格以下となる確率 (当然、バリアー価格以下でもある) であることから、バリアーを考えないときの確率 (プレインバニラオプションの確率) として計算できる。この確率からバリアー価格以下になる確率を引けばそれから P_I が計算できる。従って、P_I は $P_1 - P_2$ で求めることができる。

これまでのように価格 $S(T)$ が幾何ブラウン運動をすると仮定すると、その増分 $dS(T)$ は、

(1) $$dS(T) = rS(T)dt + \sigma S(T)dz$$

なる確率微分方程式を満たす。ここで、r は公平なる利率（無リスク世界における金利)、σ は $S(T)$ のボラティリティ、dz は標準ブラウン運動の増分を表している。

そこで始めの時点を t、満期を T とし、

(2) $$\frac{\{\ln S(T)/S(t)\} - (r - \sigma^2/2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \sim \quad \text{標準正規分布}$$

であることを利用して、満期 T においてキャッシュフロー $K - S(T)$ を得るオプションの評価額は、

(3) $$P_1 = E\{Max(0, K - S(T))\} = \int_0^K (K - S(T))f(S(T))dS(T)$$

ここで、$f(S(T))dS(T)$ は $S(T)$ の確率分布で (2) の変換により標準正規分布にしがう。同じように P_2 は (3) で積分範囲の上限が K ではなく、B であることにより、

(4) $$P_2 = E^B\{Max(0, S(T) - K\} = \int_0^B (K - S(T))f(S(T))dS(T)$$

が得られる。従って $P_I = P_1 - P_2$ は、

(5) $$P_I = \int_0^K (K - S(T))f(S(T)dS(T) - \int_0^B (K - S(T))f(S(T)dS(T))$$

第 1 の式はプレインバニラコールオプションのときと全く同じ考え方で、デジタルオプションの価格 (KW_4) からアセットオプションの価格 (W_3) を引いたものである。

(6) $$\begin{aligned} P_1 &= \int_0^K (K - S(T))f(S(T))dS(T) \\ &= \int_0^K Kf(S(T))dS(T) - \int_0^K S(T)f(S(T))dS(T) = KW_4 - W_3 \end{aligned}$$

ここで、W_4、W_3 はそれぞれ満期に価格が K 以下になる確率、満期において $S(T)$ を K 以下で計算したときの期待値である。

まず、(6) の第 1 の式のデジタルプットオプションの価格は、

(7) $$\begin{aligned} KW_4 &= K\int_0^K f(S(T))dS(T) = K\int_{-\infty}^{x_0} J_1(S(T))J_2(x)\phi(x)dx \\ &= K\int_{-\infty}^{-d_1} \phi(x)dx = K\Phi(-d_1) \end{aligned}$$

このとき、$J_1(S(T))$、$J_2(x)$ は互いに逆数関係 (したがって、$J_1 \cdot J_2 = 1$) にある積分変数変換の関数 (多変数のときは $Jacobian$ に相当する) であり、$\phi(x)$、$\Phi(x)$ は標準正規分布の密度関数、および累積分布関数である。また、d_1 はこれまでのように、

(8) $$-x_0 = d_1 = \frac{\ln\frac{S(t)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

である。

次に (6) の第 2 項のアセットプットオプション価格を詳しく計算してみよう。まず、被積分関数 $S(T)$ を求めると、

(9) $$\ln S(T) = \ln S(t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + x\sigma\sqrt{T-t} \qquad (2) \text{ より}$$

(10) $$S(T) = S(t)exp\left\{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + x\sigma\sqrt{T-t}\right\} = S(t)e^{r(T-t)}e^{-\sigma^2/2\cdot(T-t)+x\sigma\sqrt{T-t}}$$
$$= S(t)e^{r(T-t)}e^{-\frac{1}{2}\{\sigma^2(T-t)-2x\sigma\sqrt{T-t}\}}$$

これを使って、

(11) $$W_3 = \int_0^K S(T)f(S(T))dS(T) = \int_{-\infty}^{x_0} S(t)e^{r(T-t)}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+x\sigma\sqrt{T-t}}\phi(x)dx$$
$$= S(t)e^{r(T-t)}\int_{-\infty}^{-d_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left[-\frac{1}{2}\left\{x^2 - 2x\sigma\sqrt{T-t} + \sigma^2(T-t)\right\}\right]dx$$
$$= S(t)e^{r(T-t)}\int_{-\infty}^{-d_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma\sqrt{T-t})^2}dx = S(t)e^{r(T-t)}\int_{-\infty}^{-d_1}\phi(x-\sigma\sqrt{T-t})$$
$$= S(t)e^{r(T-t)}\Phi(-d_1 - \sigma\sqrt{T-t})dx$$

以上のことを纏め、(7) と (11) の価格を現在価格に直すために $e^{-r(T-t)}$ を乗じて、

(12) $$P_1 = e^{-r(T-t)}(KW_4 - W_3) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_1) - S(t)\Phi(-d_1 - \sigma\sqrt{T-t})$$

次に (5) の第 2 の式であるが積分範囲が 0〜B になっていて、一方デジタルオプションでの利得 K はそのままなので、

(13) $$P_2 = K\int_0^B f(S(T))dS(T) - \int_0^B S(T)f(S(T))dS(T)$$

第 1 の式は (8) で K の代わりに B を代入して求めた $K\Phi(-d_2)$、第 2 の式は (9)〜(12) に倣って K のところに B を代入してゆけばよいから、

(14) $$P_2 = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S(t)\Phi(-d_2 - \sigma\sqrt{T-t})$$

ここで、

(15) $$d_2 = \frac{\ln\frac{S(t)}{B} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

であり、d_2 はこれまでと同様、(8) において K の代わりに B を代入したものになっている。

さて、P_{II} の計算であるが、以前紹介したバリアーコールオプションで C_{II} を求めたときと同じ議論 [4] をすればよいのである。

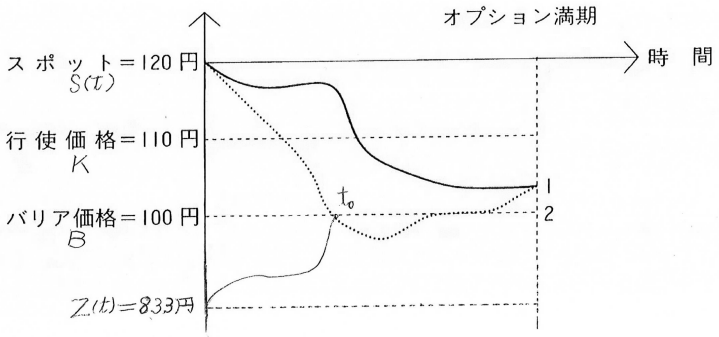

図 3. $Z(t)$ から出発して、満期で $S(T)$ がバリア価格以上、行使価格以下になるとき

すなわち、B よりずっと小さい (16) で表わされる次の $Z(t)$ を考える (B が $S(t)$ と $Z(t)$ の幾何平均となるように選んだ)。

(16)　$\sqrt{S(t)\cdot Z(t)} = B,$　つまり　$Z(t) = \dfrac{B^2}{S(t)}$

スポット価格 $S(t)$ の代わりに、スポット価格 $Z(t)$ から出発し、満期 T で $B \leq S(T) \leq K$ を満たすとき、キャシュフロー $K - S(T)$ が得られる期待値を計算し、この価格を $S(t)$ から出発したときの価格に直すことにする。そうすれば $Z(t)$ と $S(t)$ を出発点とした経路を辿る確率の違いは、それぞれが初めてバリアー価格に達する点、つまり t_0 までに到達する確率の比 m だけの違いになることが分かっているのでそれを利用し、

(17)　$P_{II} = mP'_{II}$

で求めることが出来る。

そこで (1)〜(12) の議論と同じようにしてゆき、最後に $Z(t)$ を $S(t)$ に置き換えて、

(18)
$$\begin{aligned} P_3 &= Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_3) - Z(t)\Phi(-d_3 - \sigma\sqrt{T-t}) \\ &= Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_3) - \frac{B^2}{S(t)}\Phi(-d_3 - \sigma\sqrt{T-t}) \end{aligned}$$

を得る。ここで、

(19)
$$d_3 = \frac{\ln\frac{Z(t)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\ln\frac{B^2}{KS(t)} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

そして、積分範囲が 0〜B までのときは (13)〜(15) に倣って、

(20)
$$\begin{aligned} P_4 &= Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_4) - Z(t)\Phi(-d_4 - \sigma\sqrt{T-t}) \\ &= Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_4) - \frac{B^2}{S(t)}\Phi(-d_4 - \sigma\sqrt{T-t}) \end{aligned}$$

(21)
$$d_4 = \frac{\ln\frac{Z(t)}{B} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\ln\frac{B}{S(t)} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

を得る。従って、

(22)　$P_{II} = mP'_{II} = m(P_3 - P_4)$

ここで m は、

(23)
$$m = \left(\frac{B}{S(t)}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}$$

で計算すればよい。以上すべて纏めて求める価格 P は、

(24)　$P = P_I - P_{II} = P_I - mP'_{II} = P_1 - P_2 - m(P_3 - P_4)$

となる。

10. Up and Out Put (B ≥ K) の場合の評価式

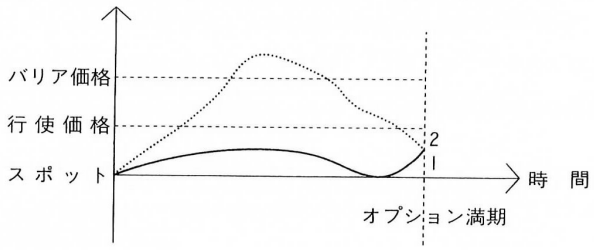

図 4. 満期で $S(T)$ が行使価格以下になるとき、バリアーを超える経路とそれを含む経路

このケースは以前バリアーオプションを分類したときの No.4 に相当し [3]、バリアー価格

(B) がスポット価格より大きい (これを Up という) とき、ノックアウトで、プットオプション、行使価格 (K) がバリアー価格 (B) より小さい場合である。

[1] 始めのスポット価格が $S(t)$ で、満期 T に価格 $S(T)$ が行使価格以下になる場合 (ここでは過去の経路は一切問わない)、

[2] オプション期間中に一度はバリアー価格以上となり、その後満期 T では価格 $S(T)$ が行使価格以下となる。

これまでのように [2] は [1] の一部である。[1] の評価額を P_I とすると、9 節で述べた (1)〜(12) のように、行使価格以下というのは当然バリアー価格以下になっており、従ってバリアー価格には関係ないので、$P_I = P_1$(積分範囲は K 以下) になる。

(25) $$P_1 = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_1) - S(t)\Phi(-d_1 - \sigma\sqrt{T-t})$$

(26) $$d_1 = \frac{\ln\frac{S(t)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

さて [2] の評価額を P_{II} とするとこれも満期では $S(T)$ が行使価格以下だけでよく、この場合は、下図のように $S(t)$ の代わりに $Z(t)$ から出発して、必ず B を通過する経路について計算し、m を乗じて戻すので、$P_{II} = mP'_{II} = mP_3$ となる (積分範囲は 0〜K に注意)。

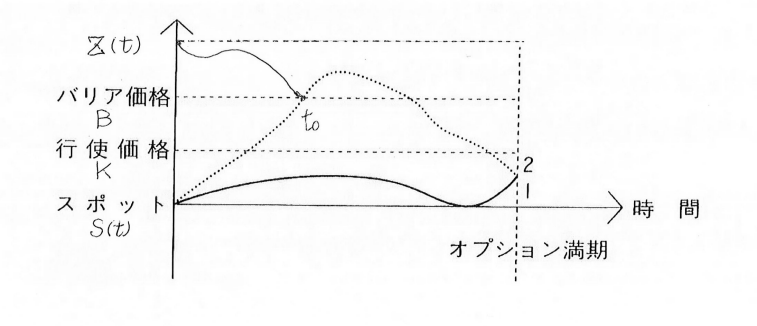

図 5. $Z(t)$ から出発して、満期で $S(T)$ が行使価格以下になるとき

(16)〜(19) のように計算し、$Z(t)$ を $S(t)$ に戻して P_3 を求めると、、

(27) $$\begin{aligned} P_3 &= Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_3) - Z(t)\Phi(-d_3 - \sigma\sqrt{T-t}) \\ &= Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_3) - \frac{B^2}{S(t)}\Phi(-d_3 - \sigma\sqrt{T-t}) \end{aligned}$$

である。ここで、

(28) $$d_3 = \frac{\ln\frac{Z(t)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\ln\frac{B^2}{KS(t)} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

そして最終的に、

(29) $$P = P_I - P_{II} = P_1 - mP_3$$

で計算することになる。

11. Up and Out Put (B ≤ K) の場合の評価式

このケースは以前バリアーオプションを分類したときの No.3 に相当し [3]、バリアー価格 (B) がスポット価格より大きいとき、ノックアウトで、プットオプション、行使価格 (K) がバリアー価格 (B) より大きい場合である。

[1] 満期 T に価格 $S(T)$ がバリアー価格以下になる場合 (ここでは過去の経路は一切問わない)、

[2] オプション期間中に一度はバリアー価格以上となり、その後満期 T では価格 $S(T)$ がバリアー価格以下となる。

勿論これまでのように [2] は [1] の一部である。[1] の評価額を P_I とすると、9 節で述べた (13)〜(15) のように、バリアー価格以下というのは自動的に行使価格以下になっており、行使価格には関係なく求まるので、$P_I = P_2$ になる。

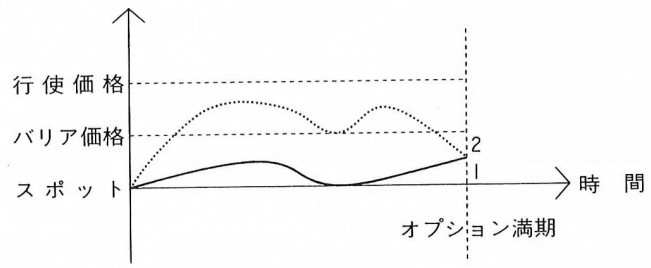

図 6. 満期で $S(T)$ がバリアー価格以下になるとき、バリアーを超える経路とそれを含む経路

つまり、0〜K の積分を 0〜B の積分で置き換えるから、デジタルオプションのところの K 以外について、K を B で置き換えて、

(30) $$P_2 = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S(t)\Phi(-d_2 - \sigma\sqrt{T-t})$$

ここで、

(31) $$d_2 = \frac{\ln\frac{S(t)}{B} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

であり、d_2 はこれまでと同様、(8) ないしは (26) において K の代わりに B を代入したものである。

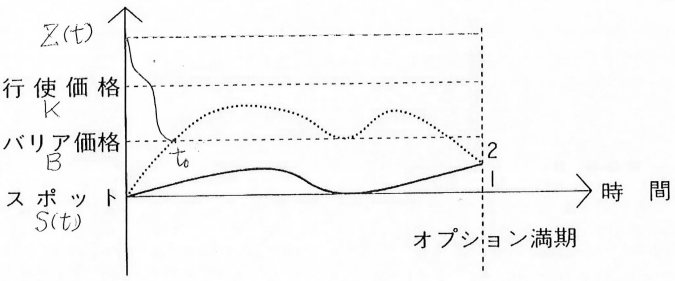

図 7. $Z(t)$ から出発して、満期で $S(T)$ がバリアー価格以下になるとき

そして、[2] の評価額を P_{II} とする。$S(t)$ を出発点とした場合、その経路がバリアー価格を超えるかどうかは分からないが、$S(t)$ と $Z(t)$ の幾何平均である B を使って計算した $Z(t)$ から出発した経路が、満期にバリアー価格以下になるためには、必ずバリアー価格を横切る。そこで、$Z(t)$ を起点とした評価額 P'_{II} を求め、$S(t)$ を起点とした経路との違い m を乗じて

$P_{II} = mP'_{II}$ として計算することにする。

$Z(t)$ を起点とした 0〜B の積分により求めた評価額は $P'_{II} = P_4$ であり、それを $S(t)$ に置き換えて、最終的に m を掛けることによって $P = P_I - P_{II}$ を求めることが出来る。

(32) $$P_4 = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_4) - Z(t)\Phi(-d_4 - \sigma\sqrt{T-t}) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_4) - \frac{B^2}{S(t)}\Phi(-d_4 - \sigma\sqrt{T-t})$$

(33) $$d_4 = \frac{\ln\frac{Z(t)}{B} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\ln\frac{B}{S(t)} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

を得る。

(34) $$P = P_I - P_{II} = P_I - mP'_{II} = P_2 - mP_4$$

ここで m は、

(35) $$m = \left(\frac{B}{S(t)}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}$$

である。

【参考文献】

【1】山下司 (2001)：オプションプライシングの数理　ー基礎理論と専門書のブリッジテキストー　金融財政事情研究会 (金融工学全般の良い、分かり易い解説書)

【2】竹内寿一郎・本田皓士（2006)：エキゾチックオプション価格のシミュレーション　その１　ーキャッシュデジタルとプレインバニラオプションー　JAPLA 2006 シンポジウム　2006.12.9 資料 (ブラック・ショールズの式の解説)

【3】竹内寿一郎（2008)：エキゾチックオプション価格のシミュレーション　その６　ーバリアーオプションの価格式 (1) ー　JAPLA2008　夏合宿 2008.8.02-04 資料 (バリアーオプション全般の解説)

【4】竹内寿一郎（2008)：エキゾチックオプション価格のシミュレーション　その７　ーバリアーオプションの価格式 (2) ー　JAPLA 2008 シンポジウム　2008.12.6 資料 (バリアーコールオプションの解説)

【5】竹内寿一郎（2009)：エキゾチックオプション価格のシミュレーション　その８　ーバリアーオプションの価格式 (3) ー　JAPLA 研究会 2009.1.24 資料 (Down and Out Call (B ≤ K) の場合の評価式)

【6】竹内寿一郎（2009)：エキゾチックオプション価格のシミュレーション　その９　ーバリアーオプションの価格式 (4) ー　JAPLA 研究会 2009.2.28 資料 (Down and Out Call (B ≥ K) の場合の評価式)