

エクゾチックオプション価格のシミュレーション その9 - バリアーオプションの価格式(4) -

Numerical Tests on the Exotic Option Pricing Models - 9 -
The Barrier Option Pricing Model(4)

(株) 竹内八ガネ商行
竹内寿一郎

7 . Down and Out Call ($B \geq K$) の場合の評価式

このケースは以前バリアーオプションを分類したときの No.10 に相当し_[3]、バリアー価格 (B) がスポット価格より小さい (これを Down という) とき、ノックアウト (バリアーに到達したら無効になる) で、コールオプション (買う権利)、行使価格 (K) がバリアー価格 (B) より小さい場合である。たとえば、ここ 7 節では次のような取引である。

原資産	ドル円為替レート
満期	6ヶ月後
スポット価格	120 円
バリアー価格	100 円
行使価格	90 円
オプション	ノックアウトコールオプション

現在の円の対ドル為替レートが 120 円のときの、行使価格 90 円のコールオプションではあるが、オプション期間の 6ヶ月以内に為替レートが、1 度でも 100 円以下の価格をつけたときこのオプションは消滅してしまう、ということである。そういうときの評価式を求めることになる。

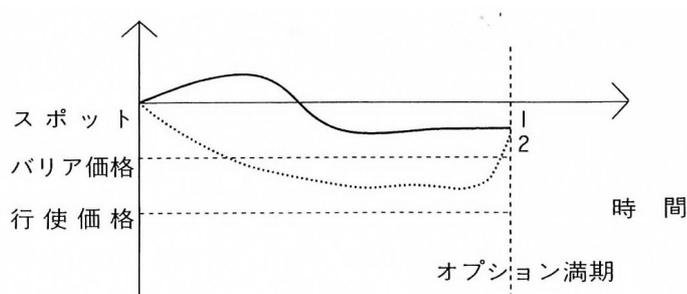


図 1 . Down のとき、満期に価格が行使価格以上になる 2 つの経路
(行使価格 90 円、バリアー価格 100 円、スポット価格 120 円)

バリアー価格を 100 円として、次の 2 つの経路を考える

- [1] 満期 T に価格がバリアー価格 100 円以上 (当然行使価格 90 円以上) になる場合 (ここでは過去の経路は一切問わない)、
- [2] オプション期間中に一度はバリアー価格 100 円以下となり (ノアウトック)、その後満期 T では価格が 100 円以上となる。

オプション期間中に一度もバリアー価格以下にならず、オプション満期 T に価格 $S(T)$ が、バリアー価格 B より大きくなっているとき、キャッシュフロー $S(T) - K$ が得られる ($S(T)$ が K という価格で買えるから) 評価額を C (これが求める評価額) とし、一方経路 [1] での価格を C_I 、経路 [2] での価格を C_{II} で表すとすると、

$$C = C_I - C_{II}$$

と書くことができる。

経路 [2] は、経路 [1] が過去の経路は一切問わないので [1] の部分であり、バリアーに到達すること無く価格 $S(T)$ がバリアー価格 B 以上になる確率は、[1] の確率から [2] の確率を引けばよい。すなわち、このときの評価額は [1] のときの評価額 C_I から [2] のときの評価額 C_{II} を引けば良いことになる。

そこでまず、満期に価格がバリアー価格以上になるとき、キャッシュフロー $S(T) - K$ を得るオプションの評価額 C_I を計算してみよう。

C_2 : 満期 T で価格がバリアー価格 B 以上のときの価格 (資産は行使価格で買える) とすると C_I は

$$C_I = C_2$$

で表される [4]。

[1] の確率は単に満期に $S(T)$ がバリアー価格以上と言う条件なので、これはプレーン vanilla オプションで積分範囲を K の代わりに B を代入した確率に一致する。従って、

$$(1) \quad C_2 = S(t)\Phi(d_2 + \sigma\sqrt{T-t}) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

ここで、

$$(2) \quad d_2 = \frac{\ln\frac{S(t)}{B} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

である。

C_{II} の計算は前回における m を使って表現することができる [4]、[5]。いま、 $S(\cdot)$ が B よりずっと小さい $Z(t)$ から出発して満期 T で $(K \leq B \leq)S(T)$ に到達する経路に注目し、この経路上で初めて B に到達する時点 t_0 とする。つまり、出発点 t では $Z(t)$ であるとする。ここで $Z(t)$ は、

$$(3) \quad Z(t) = \frac{B^2}{S(t)} \quad : \quad B \text{ は } Z(t) \text{ と } S(t) \text{ の幾何平均}$$

である。

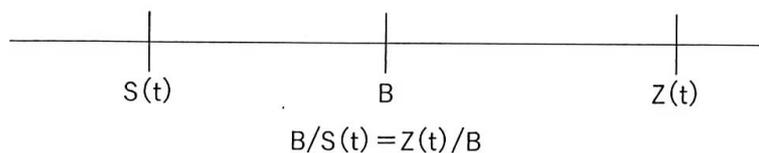


図 2 . B はスポット価格 $S(t)$ と $Z(t)$ の幾何平均である

前回と同様に、ブラウン運動の定義から系列は過去の時点や、経路に無関係なので t_0 で B に到達した後の経路は $S(t)$ を出発点としても、 $Z(t)$ を出発点としても t_0 以降は全く同じ性質を持って動く。

$Z(t)$ を出発して B を超えて満期で $(K \leq B \leq)S(T)$ となるオプション価格の評価額は、途

中の行使価格には関係しないので (1) と同じようにプレーンバニラオプションの積分範囲で K を B に変えることにより計算できる [4]。

$$(4) \quad C'_{II} = C_4$$

$$(5) \quad C_4 = E\{max(0, S(T) - K) | Z(t)\} \text{ (期待値の積分範囲は } B \text{ から無限大)}$$

$$= Z(t)\Phi(d_4 + \sigma\sqrt{T-t}) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_4)$$

$$= \frac{B^2}{S(t)}\Phi(d_4 + \sigma\sqrt{T-t}) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_4)$$

$$(6) \quad d_4 = \frac{\ln \frac{Z(t)}{B} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad \text{ここで、} Z(t) \text{ を } S(t) \text{ で表して、}$$

$$(7) \quad d_4 = \frac{\ln \frac{B}{S(t)} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

以上をまとめると、

$$(8) \quad C = C_I - C_{II} = C_I - mC'_{II} = C_2 - mC_4$$

$$(9) \quad m = \left(\frac{B}{S(t)} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}$$

を得る。

8 . J による Down and Out Call ($B \geq K$) の場合の評価式

J による関数で、バリアーオプションの評価式をつくり数値を求める。一方、シミュレーションによってブラウン運動の系列を発生させ、バリアーに到達したらプレーンバニラオプションを消滅させることで、バリアーオプションの価格の期待値を計算して理論値と比較してみた。その結果、1ヶ月に1回変動する幾何ブラウン運動のシミュレーションでは、バリアーに到達する確率が小さくなるので評価額は高めに出がちである。そこで1週間に1回、3日に1回変動させてゆくシミュレーションを行うと、細かくする程理論値に近づいてゆくことが分かった。

まず恒例により、正規分布に関する J の関数を定義する。ただし、バージョン $J6$ に準拠しているので、 $J5$ 以前のバージョンでは引数 x 、 y を $x.$ 、 $y.$ に変えなければならない。

NB. Normal Distribution

```
stnormal=(%:@o.@2:)(%~)^@-@-:@*:
```

```
NP=:3 : 0
```

```
(stnormal y)*y%(-'%'+%) / ,(>:+:k) ,. (*:y)*>:k=.i.28
```

```
)
```

```
NQ=:3 : 0
```

```
(stnormal y)*%' +/1 , , y , .>:i.28
```

```
)
```

```
Ndist=:3 : 0
```

```
if. 3.3<z=:|y do. q=:NQ z else. q=:0.5-NP z end.
```

```
if. 0<:y do. q=:1-q end.
```

```
)
```

NB. Yamanouti's Formula

```
Ninv_y=:3 : 0
```

```

z=-.4*y*(1-y)
x=.:z*(2.0611786-5.7262204%(z+11.640595))
if. y>0.5 do. x=-x end.
)
NB. Normal Random Numbers
NB. Rndm_Norm Size Mu Sigma
  Rndm_Norm=:3 : 0
'Num Mean Sigma'=.y
Mean+Sigma*Ninv_y"0 (?Num#10000000)%10000000
NB.{.Ninv_bm"1 z=(?(Num,2)$10000000)%10000000
)

```

以下がバリアーオプション No.10 の価格式である。

```

NB. =====
NB. Barrier Option Pricing Model No.10
NB. J.Takeuchi Feb. 2009
NB. Usage: Barrier10 data
NB. data is a list ( 6 members)
NB. SpotPrice StrikePrice BarrierPrice Term(Month) Sigma FreeRate
NB. ex. data=. 120 90 100 6 30 5
NB. =====
  Barrier10=:3 : 0
'Spot Kosi Barrier Term Sigma Rate'=. y
Ter=:Term%12[Sig=:Sigma%100[Rat=:Rate%100
m=(Barrier%Spot)^((2*Rat%Sig^2)-1)
er=.^-Rat*Ter
d2=.ddd Spot,Barrier
d4=.ddd Barrier,Spot
C2=(Spot*Ndist(d2+Sig*%:Ter))-Kosi*er*Ndist(d2)
C4=((Barrier^2)%Spot)*Ndist(d4+Sig*%:Ter))-Kosi*er*Ndist(d4)
C=.C2-m*C4
)
NB. =====
NB.ddd Numerator(Bunsi),Denominator(Bunbo)
NB.Usage : ddd Spot,Barrier
NB. =====
  ddd=:3 : 0
'Nume Deno'=.y
((^.Nume%Deno)+(Rat--*:Sig)*Ter)%Sig*%:Ter
)

```

シミュレーションのリストは前回と全く同じである。なお、リスト中の 1/12 は月単位

で計算するための定数でこれを小さくすれば1年をより細かく分けることができる。

```

NB.=====
NB.Simulation for Barrier Option Type 10
NB.Numbers Barrier_10 Spot Kousi Barrier Term Volatility Rate
NB.=====
  Barrier_10=:4 : 0
'S0 K B T Vol r'=.y
i=.0[Smin=.S=.MM#S0[MM=.x
label_L1.
if. T<i.>:i do. goto_owari. end.
z=.Rndm_Norm MM,0,1
S=.S+(S*(r%100)*(1%12))+S*(Vol%100)*(1%12)*z
Smin=.S<.Smin
NB. print S
goto_L1.
label_owari.
w=(S-K)*(p=:Smin>B)
NB. w=(S-K)
C=(^-(r%100)*(T%12))*MM%~+/(0<w)#w
)
NB. =====
NB. Plain Vannila Option Model(Black-Scholes)
NB. a(Spot) b(Strike) c(Term) d(Volatility) e(Rate)
NB. =====
bs =: 3 : 0
'a b c d e'=. y
t=. c % 12
u=(. ^ . a % b) + t* (e1=.e % 100) - -(bor=.d % 100) ^2
p2=. u % (bor * %: t)
p1=. p2 + bor * %: t
n1=. Ndist p1
n2=. Ndist p2
bs=. (a * n1 ) - b *n2 *( ^ (-e1) * t)
)
NB. =====

```

まず、今回の例題から、スポット価格 120 円、
行使価格 90 円、バリアー価格 100 円、オプション期間 6ヶ月、
リスクフリー金利 5%、ボラティリティ 30%では、

```
Barrier10 120 90 100 6 30 5
```

27.9592

シミュレーションでは、

1000 Barrier_10 120 90 100 6 30 5

29.4546

1000 Barrier_10 120 90 100 6 30 5

30.8357

1000 Barrier_10 120 90 100 6 30 5

30.361

1000 Barrier_10 120 90 100 6 30 5

30.1727

やや大き目に出てくる。シミュレーション回数を増やすと、

10000 Barrier_10 120 90 100 6 30 5

30.4581

10000 Barrier_10 120 90 100 6 30 5

30.8642

10000 Barrier_10 120 90 100 6 30 5

30.9574

系統적におかしいことが分かる。

これまでは1年を12ヶ月として年12回に区切って実行したものである。

それでは間隔が広すぎて、本来連続であるべきなので月単位を修正して、

シミュレーションの1/12を、1/60(ほぼ週単位)、1/120(3日単位)にすると、

1/60では、

1000 Barrier_10 120 90 100 30 30 5

29.0978

10000 Barrier_10 120 90 100 30 30 5

29.035

1/120では

1000 Barrier_10 120 90 100 60 30 5

27.4645

10000 Barrier_10 120 90 100 60 30 5

28.9223

何となく理論値の27.9592に近づいてゆくようである。

少なくとも1/12ではシミュレーションでは間隔が粗すぎるといえる。

ところで1/120でバリアーを下げてゆくと、

10000 Barrier_10 120 90 95 60 30 5

31.3524

10000 Barrier_10 120 90 92 60 30 5

31.9407

10000 Barrier_10 120 90 90 60 30 5

32.0345

となり、プレインバニラの 32.8962 に近づく過程がよく分かる。

```
bs 120 90 6 30 5
```

```
32.8962
```

最後に参考のため、1/120 のときの Barrier_10 の J リストを掲げておく。

```
NB.=====
NB.Simulation for Barrier Option Type 10
NB.Numbers Barrier_10 Spot Kousi Barrier Term Volatility Rate
NB.=====
Barrier_10=:4 : 0
'S0 K B T Vol r'=.y
i=.0[Smin=.S=.MM#S0[MM=.x
label_L1.
if. T<i=.:i do. goto_owari. end.
z=.Rndm_Norm MM,0,1
S=.S+(S*(r%100)*(1%120))+S*(Vol%100)*(%:1%120)*z
Smin=.S<.Smin
NB. print S
goto_L1.
label_owari.
w=(S-K)*(p=:Smin>B)
NB. w=(S-K)
C=(~-(r%100)*(T%120))*MM%~+/(0<w)#w
)
```

【参考文献】

- 【1】 山下司 (2001) : オプションプライシングの数理 - 基礎理論と専門書のブリッジテキスト - 金融財政事情研究会 (金融工学全般の良い、分かり易い解説書)
- 【2】 竹内寿一郎・本田皓士 (2006) : エキゾチックオプション価格のシミュレーション その1 - キャッシュデジタルとプレインバニラオプション - JAPLA 2006 シンポジウム 2006.12.9 資料 (ブラック・ショールズの式の解説)
- 【3】 竹内寿一郎 (2008) : エキゾチックオプション価格のシミュレーション その6 - バリアーオプションの価格式 (1) - JAPLA2008 夏合宿 2008.8.02-04 資料 (バリアーオプション全般の解説)
- 【4】 竹内寿一郎 (2008) : エキゾチックオプション価格のシミュレーション その7 - バリアーオプションの価格式 (2) - JAPLA 2008 シンポジウム 2008.12.6 資料 (バリアーコールオプションの解説)
- 【5】 竹内寿一郎 (2009) : エキゾチックオプション価格のシミュレーション その8 - バリアーオプションの価格式 (3) - JAPLA 研究会 2009.1.24 資料 (Down and Out Call ($B \leq K$) の場合の評価式)