エクゾチックオプション価格のシミュレーション　その11 －バリアーオプションの価格式(6)－

Numerical Tests on the Exotic Option Pricing Models － 11 －
The Barrier Option Pricing Model(6)
(バリアーオプションのまとめ　Summary of Barrier Options)

(株) 竹内ハガネ商行
竹内寿一郎

12．バリアーオプションの種類のまとめ

第１節[3]で述べたようにバリアーオプションとは、（スポット）価格が変動して、バリアー価格に達するかどうかでオプションが実行されたり(ノックインオプション)、消滅したりする(ノックアウトオプション)のであるが、このときの行使価格(K)、バリアー価格(B)、スポット価格(S)の大小、およびノックアウト・ノックイン、そしてコールオプション(買う権利を行使する、K より高い資産を K で買える)またはプットオプション(売る権利を行使する、K より安い資産を K で売れる)かによって16種類のオプションが考えられる。

すなわち、(1)バリア価格がスポット価格より大（Up）か小（Down）か、(2)ノックアウトオプションなのか、ノックインオプションなのか、(3)コールオプションなのかプットオプションなのか、(4)バリアー価格(B)が行使価格(K)より大か小か、の4つのケースの各２種類が考えられ、従ってバリアーオプションとして $2^4 = 16$ 種類のオプションを考えることができる[3](以下の表にすべての場合を掲げる)。

表1. バリアーオプションの種類(16通り)

ケース No.	バリア価格とスポット	ノックアウトかノックインか	コールかプットか	バリア価格と行使価格の大小	備考
1	Up	Out	Call	$B \leq K$	オプション消滅
2	Up	Out	Call	$B \geq K$	
3	Up	Out	Put	$B \leq K$	
4	Up	Out	Put	$B \geq K$	
5	Up	In	Call	$B \leq K$	プレインバニラ
6	Up	In	Call	$B \geq K$	ノックイン
7	Up	In	Put	$B \leq K$	ノックイン
8	Up	In	Put	$B \geq K$	ノックイン
9	Down	Out	Call	$B \leq K$	
10	Down	Out	Call	$B \geq K$	
11	Down	Out	Put	$B \leq K$	
12	Down	Out	Put	$B \geq K$	オプション消滅
13	Down	In	Call	$B \leq K$	ノックイン
14	Down	In	Call	$B \geq K$	ノックイン
15	Down	In	Put	$B \leq K$	ノックイン
16	Down	In	Put	$B \geq K$	プレインバニラ

この 16 個のケースの中で、次の 2 つのケース、1 と 12 は実現不可能な場合である。1 はバリアー価格より小さなスポット価格 (この状態を Up という) がバリアー価格より大きな行使価格になり、かつ ITM(インザマネー、すなわちコールならば満期に行使価格以上、プットならば行使価格以下になる、つまり損をせず、儲かること) であるためには、必ずバリアーを越えねばならず、その時点でオプションが消滅してしまうからである。同様に、バリアー価格より大きなスポット価格 (この状態を Down という) が、プットオプションで ITM になるためには、バリアー価格より小さな行使価格になる、つまりこれもバリアー価格を越えて小さくならなければならないので、必ずオプションが消滅してしまうからである。

さらに、5 と 16 はいずれもノックインオプションであり、ITM のためには必ずバリアー価格に到達するので、バリアーがあってもなくても同じことになり、プレインバニラオプションの式から計算できることになる。すなわち、5 はバリアー価格より小さなスポット価格 (Up) がバリアー価格より大きな行使価格に到達するには、必ずバリアー価格を越えるので、プレインバニラオプションになることが分かる。同様に、16 ではバリアー価格より大きなスポット価格 (Down) がバリアー価格より小さな行使価格になるには、必ずバリアー価格を越えて到達するので、ITM になるためには、必ずノックインオプションが生ずることによって、プレインバニラオプションと同じになるからである。

また、ノックインオプションとノックアウトオプションは必ずどちらかが生ずれば片方が生じない、つまり同じ条件のノックインとノックアウトを加えればプレインバニラオプションになるので、何れか一方を計算すれば良いので、ノックアウトの場合だけを考えることにすれば、考えるケースは 2、3、4、9、10、11 の 6 通りだけでよいことになる。

次の図はこの 6 ケースのついて $S(t)$ の挙動に注目して t から満期 T までの経路を整理したものである。

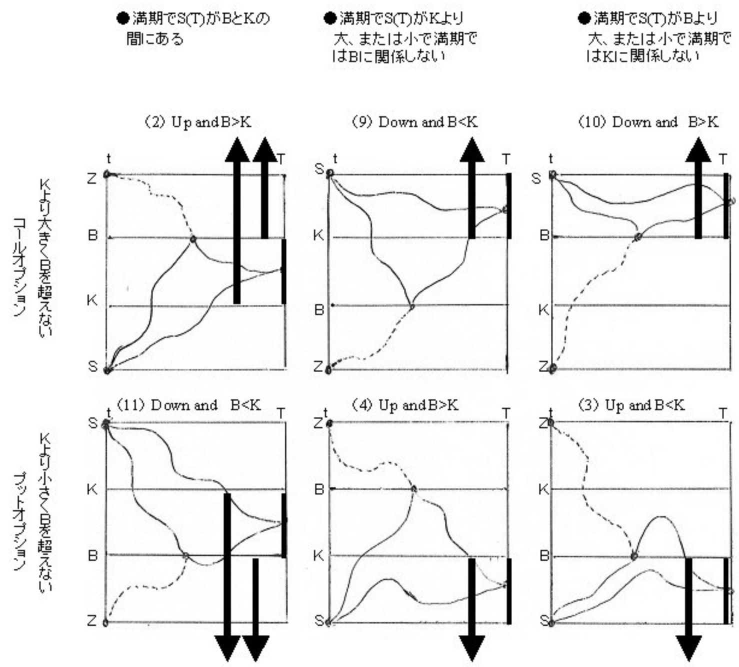

図 1. 考慮すべき 6 ケースについてコールかプットか、$Down$ か Up か
$B \leq K$ か $B \geq K$ かの条件で整理した図
(ここで $Z(t)$ は $S(t)$ との積の幾何平均が B となるようにとった点)

図 1. からいろいろなことが分かる。まず、コールオプションとプットオプションでは比較するべき全ての項目の大きさが逆になっている。基本となるケースはコールでは (2)、プットでは (11) である。(2) の場合、Up というのはバリアー (B) がスポット価格 (S) の上にあるので、$B \leq K$ のときは、S が行使価格 (K) に達するには (これがコールの条件、$S(T) - K \geq 0$) バリアーを超えねばならず、ノックアウトではオプションが消滅、逆にノックインでは常に超えるのでプレインバニラオプションになる。従って、$B \geq K$ の場合のみバリアーを考慮したオプションが有効となる。(11) のプットオプションでは下段の図で分かるように、(2) での項目の大小関係が全て逆になっていることが分かるであろう。Up は Down に、$B \geq K$ は $B \leq K$ に、積分範囲を示す太線矢印の方向が下向き ($K - S(t) \geq 0$ に相当する) になっている。

また列に注目すると、第 1 列は積分範囲が K と B の間で、コールでは K 以上の確率から B 以上の確率を引いたもの、プットでは K 以下の確率から B 以下の確率を引いたものになっている。第 2 列はコールでは K 以上の確率を計算、プットでは K 以下の確率を計算することになっていて、第 3 列はコールでは B 以上の確率を計算、プットでは B 以下の確率を計算することになっている。なお、経路がバリアーを超える場合の確率計算は、$S(t)$ の代わりに $Z(t)$ をスポット価格として採用し、計算した確率に m を乗ずれば良いことを既に述べている。【4】。

13．バリアーオプションの評価式

ある目的とする資産について、オプション開始時点を t、満期時点を T としたとき、そのそれぞれの時点での価格を $S(t)$、$S(T)$ とかき、その増分が幾何ブラウン運動に従うと仮定すれば、

(1)　　$dS(T) = rS(T)dt + \sigma S(T)dz$

なる確率微分方程式を満たす。ここで、r は公平なる利率（無リスク世界における金利)、σ は $S(T)$ のボラティィリティ、dz は標準ブラウン運動の増分を表すものとする。　このとき、行使価格を K としたときのコールオプションの評価額 C は、

(2)　　$C = S(t)\Phi(d + \sigma\sqrt{T-t}) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d)$

ここで、$\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の累積分布関数、

(3)　　$d = \dfrac{\ln\frac{S(t)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

と表せ、これをプレインバニラコールオプションの式、またはブラック・ショールズによるコールオプションの式という【2】。

ちなみに、プットオプションの評価式 P は、

(4)　　$P = -S(t)\Phi(-d - \sigma\sqrt{T-t}) + Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d)$

のように、コールオプションの式において、第 1 項と 2 項の符号を逆にし、かつ、$\Phi(\cdot)$ の引数の符号も逆にした式となる。

まず、一番基本的なタイプ (2)*Up and Out Call* ($B \geq K$) の評価式 C_{02} は、以下の記号を使って

(5)　　$C_1 = S(t)\Phi(d_1 + \sigma\sqrt{T-t}) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_1)$

(6)　　$d_1 = \dfrac{\ln\frac{S(t)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$　　(3) の d と同じ

(7) $C_2 = S(t)\Phi(d_2+\sigma\sqrt{T-t}) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_2)$

(8) $d_2 = \dfrac{\ln\frac{S(t)}{B} + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ (6) で K の代わりに B を代入したもの

(9) $C_3 = \dfrac{B^2}{S(t)}\Phi(d_3+\sigma\sqrt{T-t}) - e^{-\gamma(T-t)}K\Phi(d_3)$

(10) $d_3 = \dfrac{\ln\frac{B^2}{KS(t)} + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ (6) で $S(t)$ の代わりに $Z(t)$ を代入したもの

(11) $C_4 = \dfrac{B^2}{S(t)}\Phi(d_4+\sigma\sqrt{T-t}) - e^{-\gamma(T-t)}K\Phi(d_4)$

(12) $d_4 = \dfrac{\ln\frac{B}{S(t)} + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ (10) で K の代わりに B を代入したもの

(13) $m = \left(\dfrac{B}{S(t)}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}$

として、

(14) $C_{(2)} = C_1 - C_2 - m(C_3 - C_4)$

で求めることが出来る【4】。

次に (9)*Down and Out Call* $(B \leq K)$ の評価式 $C_{(9)}$ は、

(15) $C_{(9)} = C_1 - mC_3$

これは K 以上の積分から $Z(t)$ を考えた (バリアーを超えたときの計算) 確率を引けばよいことになる【5】。

コールの最後に取り上げた (10)*Down and Out Call* $(B \geq K)$ の評価式 $C_{(10)}$ は、

(16) $C_{(10)} = C_2 - mC_4$

これは B 以上の積分から $Z(t)$ を考えた確率を引けばよいからである【6】。

プットオプションは積分の方向がある値以下であるから、$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ なる関係を使うと、(11)*Down and Out Put* $(B \leq K)$ の評価式 P_{11} は、

(17) $P_{(11)} = P_1 - P_2 - m(P_3 - P_4)$

で計算できる【7】。ただし、P_1〜P_4 は以下の通りとする。

(18) $P_1 = -S(t)\Phi(-d_1-\sigma\sqrt{T-t}) + e^{-r(T-t)}K\Phi(-d_1)$

(19) $P_2 = -S(t)\Phi(-d_2-\sigma\sqrt{T-t}) + e^{-r(T-t)}K\Phi(-d_2)$

(20) $P_3 = -\dfrac{B^2}{S(t)}\Phi(-d_3-\sigma\sqrt{T-t}) + e^{-\gamma(T-t)}K\Phi(-d_3)$

(21) $P_4 = -\dfrac{B^2}{S(t)}\Phi(-d_4-\sigma\sqrt{T-t}) + e^{-\gamma(T-t)}K\Phi(-d_4)$

コールのときと同様に (4)*Up and Out Put* $(B \geq K)$ の評価式 P_{04} は K 以下の積分だから、B に関係なく、

(22) $P_{(4)} = P_1 - mP_3$

同じく (3)*Up and Out Put* $(B \leq K)$ の評価式 P_{03} は B 以下の積分で、K に関係なく、

(23) $P_{(3)} = P_2 - mP_4$

14．バリアーオプションの評価式のまとめ

バリアーオプションにはいろいろなオプションがあるが、それらを分類して整理しておか

ないと効率的な J 関数を作成することができない。ところで Up・$Doun$ と行使価格・バリアー価格の大小関係はデータを与えると決まる条件で、人間が意識的に決める条件はノックアウト・インとコール・プットのオプションであるといえる。ここではまず、ノックアウトで考え、そののちコールとプットの違いを考慮する分類方法を重視して整理することにする。

コールに対するスコア。　$Put = 3 - Call$

			スコア	
			コール	プット
$Knock\ Out$	Up (0)	$B \leq K$ (0)	0	3
		$B \geq K$ (1)	1	2
	$Down$ (2)	$B \leq K$ (0)	2	1
		$B \geq K$ (1)	3	0

この表に基づいてスコアから評価式のタイプを分けて計算することにする。

スコアに対する評価式。表中の PV はプレインバニラの価格

スコア		コール	プット
0	自明の解 オプションは消滅する	$C = PV - PV = 0$ (1)	$P = PV - PV = 0$ (12)
1	最も複雑な解	$C = C_1 - C_2 - m(C_3 - C_4)$ (2)	$P = P_1 - P_2 - m(P_3 - P_4)$ (11)
2	行使価格のみの解	$C = C_1 - mC_3$ (9)	$P = P_1 - mP_3$ (4)
3	バリアー価格のみの解	$C = C_2 - mC_4$ (10)	$P = P_2 - mP_4$ (3)
$Knock\ In$		$PV - C$	$PV - P$

15．J 関数によるバリアーオプションの評価式

J による関数で、バリアーオプションの評価式をつくり解析解による数値を求めてみた。一方、シミュレーションによってブラウン運動の系列を発生させ、バリアーに到達したらプレインバニラオプションを消滅させる (ノックアウト) ことで、バリアーオプションの価格の期待値を計算して理論値と比較することにする。

ノックアウトかノックインかの違いは、双方の和がプレインバニラオプションとなるのでどちらか一方が分かれば差を計算することによって、他方を求めることが出来る。それゆえここでは一貫してノックアウトだけを取り上げてきた。

シミュレーションの関数は B とか K の大小にに関係なく作れ、コールオプションかプットオプションかは、実際にはキャッシュフロー $S(T) - K$ と $K - S(T)$ の違いだけである。また、Up と Down の違いは最大値を考慮するか、最小値を考慮するかの違いである。

まず恒例により、正規分布に関する J の関数を定義する。ただし、バージョン $J6$ に準拠しているので、$J5$ 以前のバージョンでは引数 x、y を x.、y. に変えなければならない。

```
NB. Normal Distribution
NB. 確率密度関数　正の部分だけの分布関数　上側確率関数　累積分布関数
NB.   stnormal                NP                  NQ          Ndist
   stnormal=:(%:@o.@2:)(%~)^@-@-:@*:
   NP=:3 : 0
(stnormal y)*y%(-‘%‘+‘%)/,(>:+:k),.(*:y)*>:k=.i.28
)
   NQ=:3 : 0
(stnormal y)*%‘+/1,,y ,.>:i.28
)
   Ndist=:3 : 0
if. 3.3<z=:|y do. q=:NQ z else. q=:0.5-NP z end.
if. 0<:y do. q=:1-q end.
)
NB. Yamanouti's Formula  逆正規関数(正規分布のパーセント点、山内の公式)
   Ninv_y=:3 : 0
z=.-^.4*y*(1-y)
x=.%:z*(2.0611786-5.7262204%(z+11.640595))
if. y>0.5 do. x=.-x end.
)
NB. Normal Random Numbers  正規乱数
NB.    Rndm_Norm Size Mu Sigma  使い方：Rndm_Norm 乱数の数 μ  σ
   Rndm_Norm=:3 : 0
'Num Mean Sigma'=.y
Mean+Sigma*Ninv_y"0 (?Num#10000000)%10000000
NB.{.Ninv_bm"1 z=:(?(Num,2)$10000000)%10000000
)
```

●以下がバリアーオプションの価格式関数である。

```
NB. ========================================================
NB. Barrier Option Pricing Model
NB. J.Takeuchi Apr. 2009
NB. Usage: Opt Barrier Data
NB. Opt and Data is vectors ( 2 and 6 factors)
NB. Opt=(1...Call 2...Put) , (1...NockOut 2...NockIn)
NB. Data=SpotPrice StrPrice BarrierPrice Term(Month) Sigma FreeRate
NB. ex. Call Out=. 1 1   Data=. 120 90 100 6 30 5
NB. ========================================================
   Barrier=:4 : 0
'Spot Kosi Barrier Term Sigma Rate'=. y
```

```
'Call Out'=. x
if. Call=2 do. sign=:_1 else. sign=:1 end.
if. Barrier>Spot do. score=:0 else. score=:2 end.
if. Barrier<Kosi do. score=:score else. score=:score+1 end.
if. Call=2 do. score=:3-score end.
Ter=:Term%12[Sig=:Sigma%100[Rat=:Rate%100
m=.(Barrier%Spot)^((2*Rat%Sig^2)-1)
er=.^-Rat*Ter
d1=.ddd Spot,Kosi
d2=.ddd Spot,Barrier
d3=.ddd (Barrier^2),Kosi*Spot
d4=.ddd Barrier,Spot
D1=.sign*(Spot*Ndist(sign*d1+Sig*%:Ter))-Kosi*er*Ndist(sign*d1)
D2=.sign*(Spot*Ndist(sign*d2+Sig*%:Ter))-Kosi*er*Ndist(sign*d2)
D3=.sign*(((Barrier^2)%Spot)*Ndist(sign*d3+Sig*%:Ter))-Kosi*er*Ndist(sign*d3)
D4=.sign*(((Barrier^2)%Spot)*Ndist(sign*d4+Sig*%:Ter))-Kosi*er*Ndist(sign*d4)
select. score
case. 0 do. D=:0
case. 1 do. D=:(D1-D2)-m*(D3-D4)
case. 2 do. D=:D1-m*D3
case. 3 do. D=:D2-m*D4
end.
if. Out=1 do. Hyoka=:D
else. Hyoka=:bs (1 1 0 1 1 1#y)-D
end.
)
NB.=============================================================
NB.ddd Numerator(Bunsi),Denominator(Bunbo)
NB.Usage : ddd Spot,Barrier
NB.=============================================================
   ddd=:3 : 0
'Nume Deno'=.y
((^.Nume%Deno)+(Rat--:*:Sig)*Ter)%Sig*%:Ter
)
NB.=============================================================
NB.Simulation for Barrier Option
NB.Opt. Barrier_Sym Spot Kousi Barrier Term Volat Rate
NB.Opt.==>Numbers,(Call..1  Put..2),(Knock Out..1,Knock In..2),Int.
NB.Int==>Intervals:12..Month 54..Week  120..3days  365..1day
NB.=============================================================
```

```
   Barrier_sym=:4 : 0
'S0 K B T Vol r'=.y
i=.0[S=.MM#Smax=.Smin=.S0['MM Call Out Int'=.x
label_L1.
if. T<i=.>:i do. goto_owari. end.
z=.Rndm_Norm MM,0,1
S=.S+(S*(r%100)*(1%Int))+S*(Vol%100)*(%:1%Int)*z
Smin=.S<.Smin
Smax=.S>.Smax
NB. print S
goto_L1.
label_owari.
if. Call=1 do. w=.S-K else. w=.K-S end.
if. S0<B do. p=:Smax<B else. p=:Smin>B end.
if. Out=2 do. p=:-.p end.
ww=:w*p
NB. w=.(S-K)
C=.(^-(r%100)*(T%Int))*MM%~+/(0<ww)#ww
)
NB. ==========================================
NB. Plain Vannila Option Model(Black & Scholes)
NB. ===========================================
bs =: 3 : 0
'a b c d e'=. y
t=. c % 12
u=. (^. a % b) + t* (e1=.e % 100) - -:(vol=.d % 100) ^2
p2=. u % (vol * %: t)
p1=. p2 + vol * %: t
n1=. Ndist p1
n2=. Ndist p2
bs=. (a * n1 ) - b *n2 *( ^ (-e1) * t)
bs
)
```

●まず、1 月の例題から、スポット価格 120 円、
コール、ノックアウトオプション、
行使価格 100 円、バリアー価格 90 円、オプション期間 6 ヶ月、
リスクフリー金利 5%、ボラティリティ30%では、

```
   1 1 Barrier 120 100 90 6 30 5
24.1793
```

ほぼ１週間単位のシミュレーションでは

```
   1000 1 1 60 Barrier_sym 120 100 90 30 30 5
23.8097
```

●２月の例題から、スポット価格 120 円、
コール、ノックアウトオプション、
行使価格 90 円、バリアー価格 100 円、オプション期間 6ヶ月、
リスクフリー金利 5%、ボラティリティ30%では、

```
   1 1 Barrier 120 90 100 6 30 5
27.9592
```

ほぼ１週間単位のシミュレーションでは

```
   1000 1 1 60 Barrier_sym 120 90 100 30 30 5
29.6036
   10000 1 1 60 Barrier_sym 120 90 100 30 30 5
29.278
   10000 1 1 120 Barrier_sym 120 90 100 60 30 5
29.2318
```

1 日単位でのシミュレーションを繰り返すと、

```
   1000 1 1 360 Barrier_sym 120 90 100 180 30 5
27.8821
   1000 1 1 360 Barrier_sym 120 90 100 180 30 5
29.5617
   1000 1 1 360 Barrier_sym 120 90 100 180 30 5
28.1276
   1000 1 1 360 Barrier_sym 120 90 100 180 30 5
28.2219
```

●昨年 12 月の例題から、スポット価格 1000 円、
コール、ノックアウトオプション、
行使価格 1000 円、バリアー価格 1200 円、オプション期間 3ヶ月、
リスクフリー金利 5%、ボラティリティ30%では、

```
   1 1 Barrier 1000 1000 1200 3 30 5
19.3695
```

ほぼ１週間単位のシミュレーションでは

```
   1000 1 1 60 Barrier_sym 1000 1000 1200 15 30 5
26.417
```

シミュレーションの回数を増やし 3 日単位と細かく時間をとると、

```
   10000 1 1 120 Barrier_sym 1000 1000 1200 30 30 5
23.4803
```

さらに 1 日単位まで時間を細かくすると、

```
10000 1 1 360 Barrier_sym 1000 1000 1200 90 30 5
22.2372
```

期間が短いと、時間の分割に大きく支配されるようだ。
また、ボラティティも 30%と大きいという理由もありそうである。

【参考文献】

【1】山下司 (2001)：オプションプライシングの数理　ー基礎理論と専門書のブリッジテキストー　金融財政事情研究会 (金融工学全般の良い、分かり易い解説書)

【2】竹内寿一郎・本田皓士（2006)：エキゾチックオプション価格のシミュレーション　その１　ーキャッシュデジタルとプレインバニラオプションー　JAPLA 2006 シンポジウム　2006.12.9 資料 (ブラック・ショールズの式の解説)

【3】竹内寿一郎（2008)：エキゾチックオプション価格のシミュレーション　その６　ーバリアーオプションの価格式 (1) ー　JAPLA2008　夏合宿 2008.8.02-04 資料 (バリアーオプション全般の解説)

【4】竹内寿一郎（2008)：エキゾチックオプション価格のシミュレーション　その７　ーバリアーオプションの価格式 (2) ー　JAPLA 2008 シンポジウム　2008.12.6 資料 (バリアーコールオプションの解説)

【5】竹内寿一郎（2009)：エキゾチックオプション価格のシミュレーション　その８　ーバリアーオプションの価格式 (3) ー　JAPLA 研究会 2009.1.24 資料 (Down and Out Call ($B \leq K$) の場合の評価式)

【6】竹内寿一郎（2009)：エキゾチックオプション価格のシミュレーション　その９　ーバリアーオプションの価格式 (4) ー　JAPLA 研究会 2009.2.28 資料 (Down and Out Call ($B \geq K$) の場合の評価式)

【7】竹内寿一郎（2009)：エキゾチックオプション価格のシミュレーション　その１０　ーバリアーオプションの価格式 (5) ー　JAPLA 研究会 2009.3.28 資料 (バリアープットオプションの解説)