

(JAPLA 2008/9/27)

「J 言語」と複素数

統計数理研究所(名誉教授) 鈴木義一郎

【「j.」 Imaginary(虚数生成)・Complex(複素数生成)】

|  |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|--|---|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 「j」という文字を用いて、複素数「1+ 2i」を「1j2」のように表す。   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| j. 1 2 3<br>0j1 0j2 0j3  | j. _1 _2<br>0j 1 0j 2   | 「j.」という演算子に実数を入力すると、純虚数を入力すると、純虚数を出力する。つまり「j.」の片側形は、複素平面上で時計と逆まわりで   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| j. 3j4<br>4j3  | j. _4j3<br>3j 4   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| ]Z0=:3 j. 4<br>3j4   | ]Z1=:1 3 j.2 4<br>1j2 3j4   | 90度回転した複素数を出力する。<br>「j.」の両側形は、左引数を実部に右引数を虚部にもつ複素数を生成する。  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| ]Z2=:3 j.>:i.2 2<br>3j1 3j2<br>3j3 3j4<br>]Z3=:1 2 j./ 3 4 5<br>1j3 1j4 1j5<br>2j3 2j4 2j5 | ]Z4=:1 j./i.2 3 4<br>1 1j1 1j2 1j3<br>1j4 1j5 1j6 1j7<br>1j8 1j9 1j10 1j11<br>1j12 1j13 1j14 1j15<br>1j16 1j17 1j18 1j19<br>1j20 1j21 1j22 1j23 | <p>\$&amp;.&gt;Z0;Z1;Z2;Z3;Z4</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>2</td> <td>2</td> <td>2</td> <td>2</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> </tr> </table> <p>#&amp;.&gt;Z0;Z1;Z2;Z3;Z4</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>2</td> <td>2</td> <td>2</td> </tr> </table> <p>「\$」は実数と同様に、複素数に対しても形を出力する。<br/>「#」はアイテム数を出力</p> | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2  | 2   | 2  | 2 | 2 | 3 | 4 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1  | 2   | 2  | 2 | 2 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

【「+」 Plus(足算)・「-」 Minus(引算) : 両側形】

|                  |                  |  |
|------------------|------------------|--|
| 1j2 + 2j2<br>3j4 | 3j4 - 2j2<br>1j2 | <p>《複素数同士の加法と減法》</p> $(a + i * b) \pm (c + i * d) = (a \pm c) + i * (b \pm d)$ |
|------------------|------------------|--|

【「\*」 Multiply(乗算)・「%」 Devide(除算) : 両側形】

|                    |                      |                     |  |
|--------------------|----------------------|---------------------|--|
| 3j4 * 0j1<br>_4j3  | 3j4 %<br>0j_1<br>4j3 | j. 3j4<br>_4j3      | 「0j1」を掛けたり、「0j_1」で割ったりするのは、「j.」と同じ演算結果になる。           |
| 0j_1 3j4 *<br>4j 3 | 3j4 % 0j1<br>4j_3    | j.^:_1(3j4)<br>4j_3 | 「0j_1」を掛けたり、「0j1」で割ったりするのは、「j.」の逆演算「j.^:_1」と同じ結果になる。 |
| 0j_1 0j1 *<br>2    | 1j1 * 1j_1           | 2j1 * 2j_1<br>5     | 2.44949j1 *<br>2.44949j_1                            |

|   |  |  |   |
|---|--|--|---|
| 1                                       |  |  | 7 |
| 2、5、7などは実数では分解できない素数であるが、複素数なら分解が可能である。 |  |  |   |

【[+(Conjugate)] と [- (Negate)] の片側形】

|                        |                         |  |
|------------------------|-------------------------|--|
| + 1j1 1j_1<br>1j 1 1j1 | + 1j1.5708<br>1j 1.5708 | 「+」の片側形は虚数部だけ反対符号に、つまり共役複素数(実数の場合はソノママ)。 |
| - 1j1 1j_1<br>1j 1 1j1 | - 1j1.5708<br>1j 1.5708 | 「-」の片側形は実数部、虚数部を共に反対符号にする。               |

【[+. (Real/Imaginary)] と [\*.( Length/Angle)] の片側形】

|                      |                          |  |
|----------------------|--------------------------|--|
| +. 3j4<br>3 4        | +. 1j1.5708<br>1 1.5708  | 「+.」の片側形は実数部と虚数部を出力する。<br>(「0.5p1」は[ $\pi/2=1.5708$ ]である)  |
| *. 3j4<br>5 0.927295 | *.% 3j4<br>0.2 _0.927295 | 「*.」の片側形は、複素数の絶対値と偏角を出力する。逆数の絶対値は元の複素数の絶対値の逆数、偏角は符号が反対になる。 |

【[-.( )] と [%.( Matrix-Inverse)] の片側形】

|   |   |   |
|---|---|---|
| ]a=-. 3j4<br>2j 4   | a + 3j4<br>1                                      | 「-。」の片側形は、補数を出力する。<br>$a + (-.a) = 1$   |
| ]b=%. 3j4<br>0.12j 0.16   | b * 3j4<br>1                                      | 「%.」の片側形は、アトムに対しては「%」と同じで、逆数を出力する。  |
| Z2<br>3j1 3j2<br>3j3 3j4  | ]Z5=%.Z2<br>1.5j2 _1.5j_1<br>_1.5j_1.5<br>1.5j0.5 | 引数が行列の場合は逆行列を出力する。<br>round=:3 : 'j./&>1e_10<&.+.&.> <"0<br>y'<br>[:>[:([:j./1e 10" <+. )L:0<"0 |
| Z5 +/ .*Z2<br>1j3.55271e_15 3.01981e_14j8.88178e_15<br>_2.22045e_14j2.66454e_15<br>1j 1.77636e 15 | round Z5 +/<br>.*Z2<br>1 0<br>0 1                 |   |

【[\* (Signum)] と [% (Reciprocal)] の片側形】

|                        |              |   |
|------------------------|--------------|---|
| ]u=* 3j4<br>0.6j0.8    | u<br>1       | 「*」の片側形は単位円周上への射影<br>(「 」の片側形は絶対値を出力する) |
| ]r=% 3j4<br>0.12j 0.16 | r * 3j4<br>1 | 「%」の片側形は、右引数で与えた数値の逆数を出力する              |

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| j.>:i.4<br>3j1 3j2 3j3 3j4<br>t E. S<br>0 1 0 0 | ]S=:3<br>S -. 3j1<br>3j2 3j3 3j4<br>S e. t<br>0 1 1 0 | S-.t=:3j2<br>3j3<br>3j1 3j4<br>S(e.#[])t<br>3j2 3j3 |  |
|---|---|---|--|

【[\*:(Double)】と[-:(Halve)】:片側形】・【[-:(Match)】:両側形】

|                      |              |  |
|----------------------|--------------|--|
| ]a=+:1j2<br>2j4      | -: a<br>1j2  | 「+:」の片側形は右引数を2倍にする。<br>「-:」の片側形は右引数を半分にする。 |
| b -: b=:1j2 2j4<br>1 | b = b<br>1 1 | 「-:」の両側形は形まで含めて一致していれば1を出力(「+:」は複素数には不可)   |

【[\*:(Square)】と[%:( Square-Root)】の片側形】

|               |               |               |               |              |
|---------------|---------------|---------------|---------------|--------------|
| *: 1j1<br>0j2 | %: 0j2<br>1j1 | *: 2j1<br>3j4 | %: 3j4<br>2j1 | %: _1<br>0j1 |
|---------------|---------------|---------------|---------------|--------------|

【[r.] Angle(単位複素数)・Polar(極座標表示)】

|   |                              |  |   |
|---|------------------------------|--|---|
| r. 0 0.5p1<br>1p1<br>1 0j1 1  | r. 1.5p1 2p1<br>0j_1 1       | 右引数で与えた偏角をもった単位複素数を出力する。                             |   |
| 0.5p1 1p1<br>1.5708 3.14159   | 1.5p1 2p1<br>4.71239 6.28319 | (p=:0.5p1)*1 2 3 4<br>1.5708 3.14159 4.71239 6.28319 |   |
| [0.5p1],[1p1],[1.5p1],[2p1]はそれぞれ[ $\pi/2$ ],[ $\pi$ ],[ $3\pi/2$ ],[ $2\pi$ ] |                              |  |   |
| 2 r. 0.5p1<br>0j2   | 2 r_d 0.5p1<br>0j2           | *.2 r.0.5p1<br>2 1.5708                              | r_m=:[:r.]<br>r_d=:[*r_m<br>(4 : 'x<br>*r.y') |
| 3 r.1p1<br>3  | 3 r_d 1p1<br>3               | *. 3 r.1p1<br>3 3.14159                              |   |
| 0j1 1j1 r.0.5p1<br>_1 _1j1  | 0j1 1j1 r_d 0.5p1<br>_1 _1j1 | *. 0j1 1j1 r.0.5p1<br>1 3.14159<br>1.41421 2.35619   |   |
| 「r.」の両側形は片側形の結果に左引数倍(「x r.y」は「x*r.y」の演算結果と同じ)                                 |                              |  |   |

【「^」 Exponential・Power 「^.」 Natural-Log・Logarithm】

|  |   |   |                 |
|--|---|---|-----------------|
| $b.^1$   | $^.b.^1$  | 「^」と「^.」は互いに逆関数である。<br>「b.^1」は左の逆関数を与える「副詞」                                     |                 |
| $]E=:^1j1$<br>1.46869j2.28736                  | $^.E$<br>1j1  | $]L=:^.1j1$<br>0.346574j0.785398  | $^L$<br>1j1     |
| $]E10=:10^1j1$<br>6.68202j7.4398               | $10^.E10$<br>1j1  | $]L10=:10^.1j1$<br>0.150515j0.341094  | $10^L10$<br>1j1 |
| $m=:1 2 3 4$<br>$]z=:1j1^m$<br>1j1 0j2 _2j2 _4 | $*.z$<br>1.41421 0.785398<br>2 1.5708<br>2.82843 2.35619<br>4 3.14159 | $(%:2)^m$<br>1.41421 2 2.82843 4<br>0.25p1*m<br>0.785398 1.5708 2.35619 3.14159 |                 |

【「i:」】

|   |   |  |  |
|---|---|--|--|
| test1 2 5<br>0.8  | test2 2<br>5<br>0 1 2                   | (test2*test1)2 5<br>0 0.8 1.6                                | test1=:2:*%/<br>test2=:i.@>:@{.  |
| 2*2%5<br>0.8  | i.>:{.2<br>5<br>0 1 2                   | ({.-test2*test1)2<br>5<br>2 1.2 0.4                          | 「{.」 : 先頭の要素をとる<br>(>:」は1増)  |
| line=:(,,-@ ..)@unit[ unit={.-i.@>:@{.*2:*%/  |   |  | 「 」 : 絶対値をとる<br>「+.」 : 実部・虚部を出力<br>「-:」 : 数値を半分にする<br>「 .」 : 全要素の反転<br>[ .^(1)]=[ .] |
| ]u=:unit 2<br>5<br>2 1.2 0.4  | . u<br>0.4 1.2 2                        | -@ . u<br>0.4 1.2 2  |  |
| (,,-@ ..)u<br>2 1.2 0.4 _0.4 _1.2 _2  | line 2 5<br>2 1.2 0.4 _0.4 _1.2<br>2    |  |  |
| ]c=:3 :'line r=:+.y.'2j5<br>2 1.2 0.4 0.4 1.2 2   | -:1+*{r<br>1                            | .^(1 c<br>2 1.2 0.4 0.4 1.2 2                                |  |
| ]d=:3 :'line r=:+.y.'_2j5<br>2 1.2 0.4 0.4 1.2 2  | -:1+*{r<br>0                            | .^(0 d<br>2 1.2 0.4 0.4 1.2 2                                |  |
| icolon=:3 :0<br>if.0=((><.)+:(<0:)){:+.y.do.'domain error'<br>else. .^( -:1+*{r)line r=:+.y.end.<br>) |   |  | 「i:」は虚数部が正の整数以外に対しては domain error となる。   |
| icolon 2j5<br>_2 _1.2 _0.4 0.4 1.2<br>2   | icolon _2j5<br>2 1.2 0.4 _0.4 _1.2<br>2 | 「i:a+ib」は a>0 なら (-a) から (a) まで (2a/b) の間隔の数列を生成 (a<0 なら逆順)。 |  |
| i: 2j5<br>_2 _1.2 _0.4 0.4 1.2<br>2   | i: _2j5<br>2 1.2 0.4 _0.4 _1.2<br>2     |  |  |
| 「icoron」は “i:” を使わず同じ働きをする複素数に対する関数。<br>演算子「i:」の片側形は、虚数部が正整数の場合にのみ作動する。                               |   |  |  |

【「?」 Roll . 「?」 Deal】

|  |  |   |
|--|--|---|
| <pre> ]r=:? 2 5 \$ 10 3 0 7 5 8 9 4 4 0 3 </pre>           | <pre> j./ r 3j9 0j4 7j4 5 8j3 </pre>         | 「?」の片側形は重複を許した整数乱数を10個出力し、2個を対にして5個の複素数乱数を出力。 |
| <pre> ]r=:_5 + ? 2 5 \$ 10 2 _4 0 0 3 2 5 4 1 1 </pre>     | <pre> j./ r 2j_2 _4j_5 0j_4 0j_1 3j_1 </pre> |   |
| <pre> ]r=:2 5 \$ _5+10 ? 10 _1 _3 _2 _5 3 4 2 0 1 4 </pre> | <pre> j./r _1j4 _3j2 _2 _5j1 3j_4 </pre>     | 「?」の両側形は重複を許さぬ整数乱数を出力する。                      |

【「+.」 GCD(最大公約数)・「\*。」 MCD(最小公倍数)】

|   |   |
|---|---|
| <pre> complex=:3 :0 r=.j.^:(i.4)y+h=.0 while.h&lt;&lt;.-:y   do.s=.j.^:(i.4)j./h,y-h=.h+1   r=.r,~.s,j.^:(i.4)j./(-h),y-h end. /:~r ) less=:3 :'/:~;complex&amp;.&gt;&lt;"0}.i.&gt;:y' </pre> | <pre> complex 1 1 0j 1 0j 1 1 complex 2 2 1j 1 1j 0j 2 0j 2 1j 1 1j 2 3 4 \$ complex 3 _3 _2j_1 _2j1 _1j_2 _1j2 0j_3 0j3 1j_2 1j2 2j_1 2j1 3 </pre> |
| <pre> 2 12 \$ less 3 _3 _2j_1 _2 _2j1 _1j_2 _1j_1 _1 _1j1 _1j2 0j_3 0j_2 0j_1 0j1 0j2 0j3 1j_2 1j_1 1 1j1 1j2 2j_1 2 2j1 3 </pre>   |   |

|   |   |
|---|---|
| <pre> min=:[:&lt;./[:+/@+.&amp;&gt;; int=: (2:=[:+/0:=]-&lt;.)"1@+."0 com_d=:4 :0 Z=.less x min y (X=. (int x%Z)#Z);Y=. (int y%Z)#Z /:~.((X e.Y)#X),(Y e.X)#Y ) NB. 左右の引数の公約数のセットを出力 6 com_d 8 </pre> | <pre> 2j1 min 3j4 3 (int#)2j1 2j1.5 3j3.5 3j4 2j1 3j4 ]Z=:2j1 com_d 3j4 _2j_1 _1 _1j2 0j_1 0j1 1j_2 1 2j1 2j1 +. 3j4 2j1 </pre> |
| <pre> 2 1j 1 1 1j1 0j 2 0j 1 0j1 0j2 1j 1 1 1j1 2 </pre>  |   |



|  |   |
|--|---|
| <pre> com_m=:4 :0 h=.(+ +.x)&gt;.+ +.y t=.{(a=.x*c);b=.y*c=.less h /:~;(1=,a=/b)#,{.L:0 t ) </pre> | <pre> 4 5 \$ 2j1 com_m 3j4 _11j2 _10j_5 _8j6 _7j_1 _6j_8 _5j10 _4j3 _3j_4 _2j_11 _1j7 1j_7 2j11 3j4 4j_3 5j_10 6j8 7j1 8j_6 10j5 11j_2 </pre> |
| <pre> 1j1 com_m 3j4 _7j_1 _1j7 1j_7 7j1 1j1 *. 3j4 1j7 </pre>                                      | <pre> 2j1 *. 3j4 3j4 </pre>   |
| <pre> 6 com_m 8 48 24j 24 24 24j24 0j 48 0j 24 0j24 0j48 24j 24 24 24j24 48 </pre>                 |   |

【複素数演算と2次元平面上の一次変換】

| 複素数演算            | 一次変換の行列                             | 行列計算                       | コメント |
|------------------|-------------------------------------|----------------------------|------|
| (*&1) 3j4<br>3j4 | ]E=:2 2 \$ 1 0 0<br>1<br>1 0<br>0 1 | E (mp=:+/.*) 3<br>4<br>3 4 | 恒等変換 |
| (*&2) 3j4<br>6j8 | ]E2=:2*E<br>2 0<br>0 2              | E2 mp 3 4<br>6 8           | 相似変換 |

|                     |                                      |                    |                               |
|---------------------|--------------------------------------|--------------------|-------------------------------|
| + 3j4<br>3j_4       | ]X=:2 2 \$ 1 0 0<br>_1<br>1 0<br>0 1 | X mp 3 4<br>3 _4   | 実軸(横軸)に関して<br>対称変換する。         |
| -&+ 3j4<br>_3j4     | ]Y=: -X<br>_1 0<br>0 1               | Y mp 3 4<br>_3 4   | 虚軸(縦軸)に関して<br>対称変換する。         |
| . & .+ . 3j4<br>4j3 | ]LX=: -.E<br>0 1<br>1 0              | LX mp 3 4<br>4 3   | 直線「 $y = x$ 」に関して<br>対称変換する。  |
| +&j . 3j4<br>_4j_3  | ]LY=: -LX<br>0 _1<br>1 0             | LY mp 3 4<br>_4 _3 | 直線「 $y = -x$ 」に関して<br>対称変換する。 |

|                      |   |                       |                              |
|----------------------|---|-----------------------|------------------------------|
| j . 3j4<br>_4j3      | ]R90=:2 2 \$ 0 _1<br>1 0<br>0 _1<br>1 0 | R90 mp 3<br>4<br>_4 3 | $(a,b)$ を平面上で<br>90度回転する。    |
| (j.^:2) 3j4<br>_3j_4 | ]R180=: -E<br>_1 0<br>0 1               | R180 mp 3<br>4<br>3 4 | $(a,b)$ を平面上で<br>180度回転する。   |
| (j.^:_1) 3j4<br>4j 3 | ]R_90=: -R90<br>0 1                     | R_90 mp 3<br>4        | $(a,b)$ を平面上で時<br>計回りに90度回転。 |

|                         |                                  |                 |                          |
|-------------------------|----------------------------------|-----------------|--------------------------|
|                         | 1 0                              | 4 3             |                          |
| (+/, {.)&.+ .3j4<br>7j3 | ]P=:2 2 \$ 1 1 1 0<br>1 1<br>1 0 | P mp 3 4<br>7 3 | (a,b) を (a+ b,b) に<br>変換 |

【3点  $A = (4,3)$ ,  $B = (1,0)$ ,  $C = (7,0)$  で与えられる三角形の重心の位置を求める問題】

|                                  |                       |   |
|----------------------------------|-----------------------|---|
| <code>T=:4j3;1;7</code>          | <code>gpoint T</code> | $\triangle ABC$ の位置を複素数で表示して「T」という変数に入力。「gpoint」は重心を求める関数 |
| <code>gpoint=:+/@:&gt;%3:</code> | <code>4j1</code>      |   |

【7点一致の問題：任意の四角形 ABCD に対して、次の7つの点が全て一致する】

|   |                |  |
|---|----------------|--|
| ① 辺 AB の中点と辺 CD の中点を結ぶ線分の中点 : P1            |                |  |
| ② 辺 BC の中点と辺 DA の中点を結ぶ線分の中点 : P2            |                |  |
| ③ 対角線 AC の中点と対角線 BD の中点を結ぶ線分の中点 : P3        |                |  |
| ④ 三角形 ABD の重心と頂点 C とを結ぶ線分を 1 : 3 に分ける点 : P4 |                |  |
| ⑤ 三角形 ABC の重心と頂点 D とを結ぶ線分を 1 : 3 に分ける点 : P5 |                |  |
| ⑥ 三角形 BCD の重心と頂点 A とを結ぶ線分を 1 : 3 に分ける点 : P6 |                |  |
| ⑦ 三角形 ACD の重心と頂点 B とを結ぶ線分を 1 : 3 に分ける点 : P7 |                |  |
| <code>'A B C D'=:4j8;6j6;8;0</code>         |                | 四角形 ABCD を複素数値で与える。                    |
| <code>mpt=:[: -:[:+ /&gt;</code>            | 「mpt」は中点を与える関数 | <code>]P1=:mpt(mpt A;B);mpt C;D</code> |
| <code>div4=:[:+ /4:%~]*1:,3:</code>         |                | <code>4.75j3.5</code>                  |
| <code>]P2=:mpt(mpt B;C);mpt D;A</code>      |                | <code>]P3=:mpt(mpt C;A);mpt B;D</code> |
| <code>4.75j3.5</code>                       |                | <code>4.75j3.5</code>                  |
| <code>]P4=:div4 C,gpoint A;B;D</code>       |                | <code>]P5=:div4 D,gpoint A;B;C</code>  |
| <code>4.5j3.5</code>                        |                | <code>4.5j3.5</code>                   |
| <code>]P6=:div4 A,gpoint B;C;D</code>       |                | <code>]P7=:div4 B,gpoint A;C;D</code>  |
| <code>4.5j3.5</code>                        |                | <code>4.5j3.5</code>                   |