２００６年１０月２８日

オプション価格の２項確率過程からブラウン運動へ

From Binomial Random Process to Brown Process in Black-Scholes Option Pricing Model

慶応義塾大学理工学部
竹内寿一郎

1. はじめに

夏合宿でブラック・ショールズのオプション価格式の誘導を紹介したが、2 項確率過程からその近似として用いた、連続型のブラウン運動による正規過程への展開がやや雑であったことは認識していた【2】。すなわち、資産の価格上昇率 $u=\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}$、同じく価格下降率 $d=\mu\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}$ とする根拠の追究が十分ではなかった。

そこで本稿では 2 項過程で $n\to\infty$ のときの u と d がどのような条件を満たさなければならないか、その決定における任意性も含めて、述べてみたいと思う。

2. n 期間 2 項モデル

ある資産の価格が時間 $t=0$ で S、1 期経過後に大きく上昇した場合の利率を u、それほど上昇しなかった場合の利率を d、また大きく上昇する確率を p、そうでない場合の確率を $1-p$ とすると、1 期後の価格は次のようになる。

$$S=\begin{cases}(1+u)S & : \quad p\\ (1+d)S & : \quad (1-p)\end{cases}$$

これが n 期間繰り返されるのが 2 項確率過程で、n 個の独立な確率変数 X_1、X_2、$\cdots$、X_n を用いて表現すると、

$$\begin{cases}Pr\{X_i=1+u\}=p & \text{上昇変動のとき}\\ Pr\{X_i=1+d\}=1-p & \text{上昇変動でないとき}\end{cases}$$

を用いて、前節の議論から、n 回の価格変動が生じて、n 期後の時間を T と書くことにすれば、

$$S_T=X_nX_{n-1}X_{n-2}\cdots X_1S$$

となっているから、コールオプションの価格は、

$$\begin{aligned}C &= \frac{1}{(1+r)^n}E[Max\{S_T-K,0\}]\\ &= \frac{1}{(1+r)^n}E[Max\{X_nX_{n-1}\cdots X_1S-K,0\}]\\ &= \frac{1}{(1+r)^n}\sum_{k=0}^{n}Max\{(1+u)^k(1+d)^{n-k}S-K,0\}{}_nC_kp^k(1-p)^{n-k}\\ &= \frac{1}{(1+r)^n}\sum_{(1+u)^k(1+d)^{n-k}>K/S}\{(1+u)^k(1+d)^{n-k}S-K\}{}_nC_kp^k(1-p)^{n-k}\\ &= S\sum_{k=k_0}^{n}{}_nC_k\left(\frac{1+u}{1+r}p\right)^k\left(\frac{1+d}{1+r}(1-p)\right)^{n-k}-\frac{K}{(1+r)^n}\sum_{k=k_0}^{n}{}_nC_kp^k(1-p)^{n-k}\end{aligned} \tag{1}$$

ここで、k_0 は $(1+u)^k(1+d)^{n-k}\geq K/S$ を満たす最大の整数を表す。また第 1 項の Σ は、パラメータを $p_0=\dfrac{1+u}{1+r}p$ としたときの 2 項分布の部分和、第 2 項の Σ はパラメータ $p_0=p$ の 2 項分布の部分和である【1】【2】。

3. 離散区間 Δt から連続区間 $(0,T)$ へ

よく知られているように期間利率が i のとき、A 円に対する 1 期間後の元利合計は $A(1+i)$ で、n 期間後の複利による元利合計は $A(1+i)^n$ となる。このとき $(1+i)^n$ を終価係数、すなわち今のお金を n 期間後の価格になおす係数、$(1+i)^{-n}$ を現価係数といい、すなわち n 期間後のお金を現在の価格になおす係数である。

いま、区間 T を n 個に分割し、分割された区間を Δt とすると、

$$T = n\Delta t$$

であり、r を標準利率とし、この区間における終価係数を考えると、r が小さければ近似的に

$$(1+rT) = (1+r\Delta t)^n$$

と書くことができる。

この右辺の式に $\Delta t = \dfrac{T}{n}$ を代入し $n \to \infty$ とすると

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+r\frac{T}{n}\right)^n = e^{rT}$$

を得る。このとき r は期間 $(0,T)$ に於ける平均利率と考えられる。連続期間の場合、複利計算の係数 $(1+i)^n$ の代わりに e^{rT} が用いられる。勿論、連続区間の終価係数は e^{rT} で、現価係数は e^{-rT} である。

4. 2 項確率過程からブラウン運動過程に

さて本題に入ろう。株価など、資産の価格 S は幾何ブラウン運動に従うことを仮定しているので、

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

が成り立ち、この方程式の解は伊藤積分より【1】【3】、

$$d\ln S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz$$

を満たし、次の正規分布に従う。

$$d\ln S \quad \sim \quad N\left(\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt, \sigma^2 dt\right) \tag{2}$$

そこで、2 項確率過程における n 期間後の $\ln S$ の変化 ΔS は (前ページの C の式 (1) と比べてやや異なるが、後の符号のことを考慮し、k を $n-i$ に、$n-k$ を i に変更している)、

$$\begin{aligned}\Delta S = \ln S(1+u)^{n-i}(1+d)^i - \ln S &= (n-i)\ln(1+u) + i\ln(1+d) \\ &= n\ln(1+u) - i\ln\left(\frac{1+u}{1+d}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

この期待値をとり、$n \to \infty$ の極限をとれば (3) の期待値と分散は (2) の期待値と分散に一致しなければならないので、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln E\{\Delta S\} &= \lim_{n\to\infty}\ln E\left\{n\ln(1+u) - i\ln\left(\frac{1+u}{1+d}\right)\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} n\ln(1+u) - E\{i\}\ln\left(\frac{1+u}{1+d}\right) \\ &= \left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln V\{\Delta S\} &= \lim_{n\to\infty}\ln V\left\{n\ln(1+u) - i\ln\left(\frac{1+u}{1+d}\right)\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} V\{i\}\left\{\ln\left(\frac{1+u}{1+d}\right)\right\}^2 \\ &= \sigma^2 T\end{aligned} \tag{5}$$

ところで i はパラメタ p^* の 2 項分布に従うので、

$E\{i\} = np^*$

$V\{i\} = np^*(1-p^*)$

を (4)、(5) の式に代入すると、連立方程式、

$$
(6) \quad \begin{cases} \lim_{n\to\infty} n\ln(1+u) - np^*\ln\left(\dfrac{1+u}{1+d}\right) = \left(\mu - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)T \\ \lim_{n\to\infty} np^*(1-p^*)\left\{\ln\left(\dfrac{1+u}{1+d}\right)\right\}^2 = \sigma^2 T \end{cases}
$$

が得られる。ところがこの連立方程式は未知数が u、d、p^* の 3 つで、式が 2 つであるから解を一意に決めることは出来ない。そこで解の一つとして、

$$
(7) \quad \begin{cases} 1+u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ 1+d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ p^* = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{\mu - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)\sqrt{\Delta t} \end{cases}
$$

とすると、(6) の連立方程式を満たすことが分かる。ただし、分散の方は $(\sqrt{\Delta t})^2$ が 0 に収束することを用いることに注意しよう。

ところで、この解は $(1+u) = \dfrac{1}{1+d}$ の関係があり、これらから計算する p が $0 \leq p \leq 1$ を満たす保証も無いので実際には次のような解を採用すると良い。

$$
(8) \quad \begin{cases} 1+u = e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} \\ 1+d = e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}} \\ p^* = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{\mu - r}{\sigma}\right)\sqrt{\Delta t} \end{cases}
$$

この解が上の連立方程式 (6) を満たすことを確かめて見るとよい。
そこで、$\mu = r - \dfrac{1}{2}\sigma^2$ とすると、

$$
(9) \quad \begin{cases} 1+u = 1 + \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \\ 1+d = 1 + \mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t} \end{cases}
$$

のように表現することができる訳である。この結果が本稿の目的である。

5. 終わりに

このあとは上の関係式 (9) を用いて文献【2】のように中心極限定理を用いて、ブラック・ショールズの価格式を求めることができる。また、文献【4】に従って求めるとすると、C の式 (1) の 2 項分布の確率を中心極限定理を用いて評価するときに、(7) の関係式を用いるが、このとき指数関数 $e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ などのマクローリン展開がかなり多く使われるので、単純ではあるが計算は非常に厄介になる。

【参考文献】

【1】　森真、藤田岳彦 (1999)：確率・統計入門　ー数理ファイナンスへの適用ー　講談社サイエンティフィク

【2】　竹内寿一郎 (2006)：ブラック・ショールズのオプション価格の式について、JAPLA 研究会 2006 年 8 月、夏合宿資料

【3】　蓑谷千凰彦 (2000)：ブラック・ショールズモデル、東洋経済社

【4】　山下司 (2001)：オプションプライシングの数理　ー基礎理論と専門書のブリッジテキストー　金融財政事情研究会