Metlov 博士が愛した数式

(Metlov's Triumph)

慶応義塾大学理工学部
竹内寿一郎

１．はじめに

毎年、夏合宿が行われている「APL コンサルタンツ・オブ・ジャパン社」の蓼科研修所の２階セミナー室のホワイト・ボードにユージン・マクダネル氏のサインがあり、彼がここに来た、と、記されており、決して消さないで下さい、と注意書きがしてある。今から２０年ほど前、怖いもの知らずだった私は、たどたどしい英語を引っさげて、サンフランシスコ郊外のパロ・アルトに住んでいたマクダネル氏を訪ねたものだった。実は三枝さんから紹介されたベリー・サチコ女史がパロ・アルトに住んでおり、彼女に会うそのついでに立ち寄ったのであった。

初めてマクダネル氏に会う目的は、当時私は APL の初心者ではあったが、かなり APL に夢中になっていたので、その良さについてお話をして貰うことであった。マクダネル氏は懇切丁寧に、APL を使った奇数次の魔方陣のコーディングを示して、如何に簡便に APL で書けるかを説明してくれた。私は以前 JAPLA 研究会で「魔方陣について」報告したことがあったが、その中でそのときの彼の APL 関数を J に書き換えて載せたのである [1]。

この度、前回の「ベルギー数」もそうであったが [2]、今回もユージン・マクダネル氏の報告で、イギリス APL 協会発行の「ベクター」に掲載されたものからの話題である [3]。

さて本題に移ろう。一つの三角形がある（底辺を下に描いた２等辺三角形を書く方が見易い）。その二つの端点 (底辺の点) から対辺に向かってそれぞれ $(m-1)$ 本、$(n-1)$ 本の線を引き、対辺を m 個、n 個の線分に分割する。このときできる大小全ての三角形の数を求めるという問題である。対辺にぶつかる点、および元の三角形の点を加えると $(m-1+n-1+3)$ 個、交点の数は $(m-1)(n-1)$ 個出来、全ての点の数は $mn+2$ 個あり、その中から任意に 3 個取り出したとしても、それが三角形にならないときもあり、この問題は複雑である。

このパズルは最近 *Frank Buss* によって知られるようになったので、「*Frank Buss* の三角問題」といわれ、`http://www.frank-buss.de/challenge/`で見ることができる。

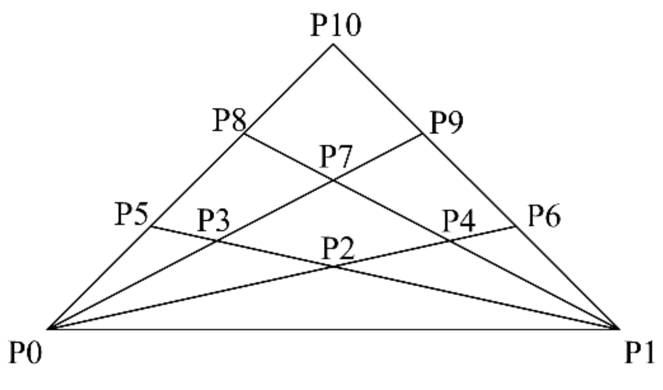

図１．*Frank Buss* の三角問題
この中に含まれる全ての三角形を見つける

上の図を見て答えを考えてみよう。そしてその規則性を見出す努力もしてみよう。（…間）
答えは 27 個で、$m=3$、$n=3$ のときの全ての三角形を図に示すと下のようになる。

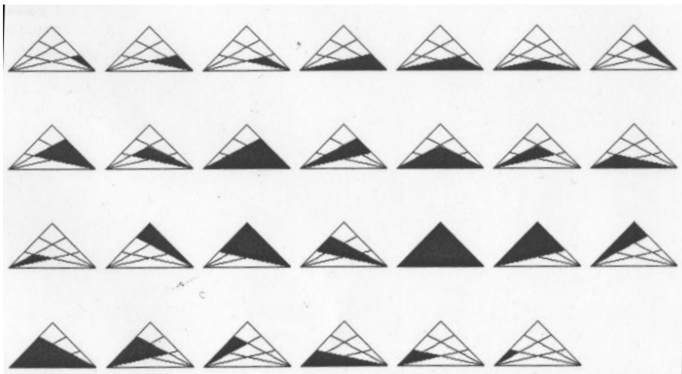

図２．全ての三角形

２．コンテスト

この問題について、いろいろな言語で挑戦してきたという報告が先のホームページにあり、ベクターにも載っていた。使われた言語、その言語で挑戦してきた人の数、それぞれの言語での平均ステップ数が記されている。中でも目に付くのは勿論 J で、一人が挑戦し、一行で完成している。

Language	Number of entries	Average number of lines
C++	3	115
Java	4	105
Python	1	94
Haskell	1	93
Ruby	1	75
Scheme	1	66
Awk	1	59
Lisp	17	56
Kogut	1	29
J	1	1

図３．言語コンテストの表
J だけ飛び抜けて良い

上の表はおかしい。C++で 100 ステップ以上かけているが、これは三角形を数えるためのアルゴリズムを述べているためで、後で述べる三角形の数だけを求める式を記述するのであれば、どの言語でも 1 行で書けるはずである。

３．Metlov 博士が愛した数式

この問題の解は簡単な式で表せ、両端点 P0、P1 からの線の数を左右同数の $(m-1)$ 本とすると、

$N_m = m^3$　　勿論 J では簡単にかけて、　`Nm=:^&3`

また両端点からの線の数が異なり、それぞれ $(m-1)$ 本、$(n-1)$ 本とすると、

$N_{mn} = \frac{1}{2}mn(m+n)$　　J で書くと　`Nmn=:*-:@*＋`

このＪの解は物理学博士 $K.L.Metlov$ により求められたもので、その思考過程のメモが残されている。それをここで紹介しておく。これぞ、博士が愛した数式である。

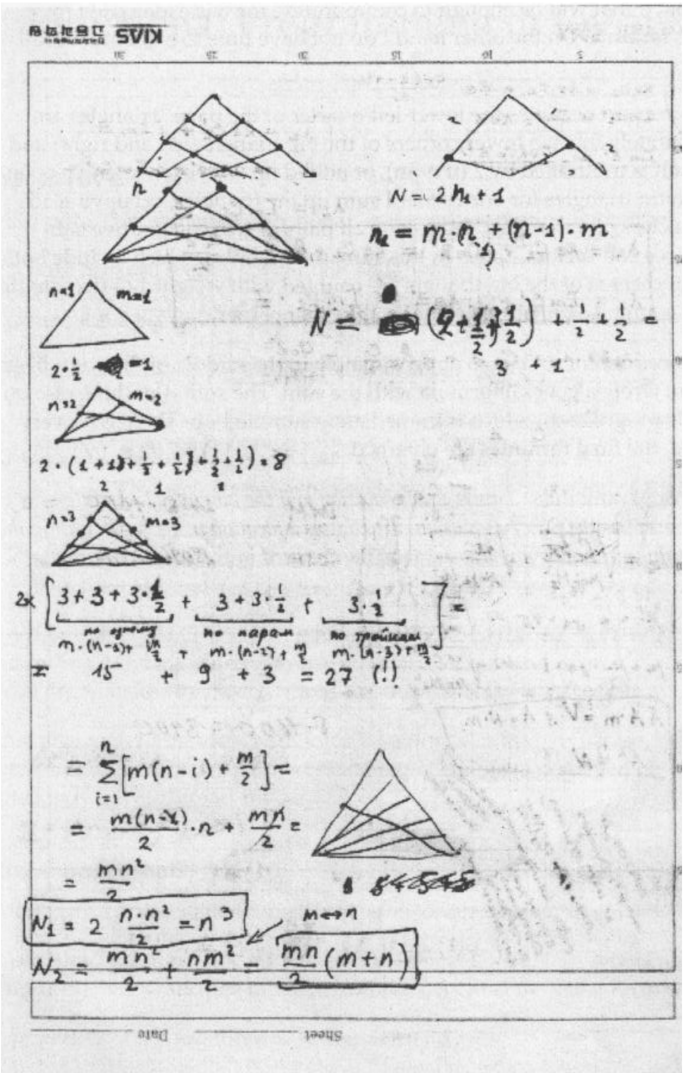

図４．Metlov 博士のメモ

さて、博士の数式から三角形を数えるアルゴリズムを納得して得られるであろうか。

$$\sum_{i=1}^{n} m(n-i)$$

はどうにか分かるが、$\dfrac{m}{2}$ が n 倍出てくる理由が掴めないのである。
そこで、次節は私なりにこの問題を考えて解いてみた。

４．私が愛する数式

まず、この問題の複雑性はどこにあるか調べてみると、左右対称であるようで、m、n が異なれば左右対称ではない。厄介なのは三角形の数を数えるときに２重にカウントしてしまうことである。博士のメモではやけに２分の１がでてくることに注意しよう。

そこで私は２重にカウントする恐れがある辺 (P0、P1) に関する三角形のカウントを除いて、凹四角形 (P0、P2、P1、P10) の中だけの三角形の数を数えることにする。実はそうする

ことにより複雑な入り組んだ三角形を数える必要がなくなるのである。一般に左の線分 (P0、P10) が m 個に分割され、右の線分 (P1、P10) が n 個に分割されているものとする。そして P0 を頂点とする三角形、および P1 を頂点とする三角形の数に大きく分けて考え、あとでそれを合計する。それらは全て異なった三角形であることが分かる。このとき、P0 を頂点とする三角形は $\sum_{i=1}^{n} m(n-i)$ 個、P1 を頂点とする三角形は $\sum_{i=1}^{m} n(m-i)$ 個と数えることができる。この式がメモにある博士が愛した数式の基本である。さて、仕上げは簡単で、あとは (P0、P1) を底辺とする三角形を数えて加えればよい。その数は底辺以外の交点の数、mn に等しい。と、言う訳で私の愛した数式が以下のように得られる。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} m(n-i) + \sum_{i=1}^{m} n(m-i) + mn \\
=&m\left(n^2 - \frac{n(n+1)}{2}\right) + n\left(m^2 - \frac{m(m+1)}{2}\right) + mn \\
=&\frac{m}{2}(2n^2 - n^2 - n) + \frac{n}{2}(2m^2 - m^2 - m) + mn \\
=&\frac{mn(n-1)}{2} + \frac{mn(m-1)}{2} + mn \\
=&\frac{mn^2}{2} + \frac{nm^2}{2} \\
=&\frac{mn}{2}(m+n)
\end{aligned}
$$

【参考文献】

[1] 竹内寿一郎 (2000)：Ｊでパズルを一第７回　魔方陣の問題一,　JAPLA 研究会　2000 年 9 月 30 日　於統計数理研究所.

[2] E.McDonnell(2005) : At Play with J:Belgian Numbers, VECTOR Vol.22 No.1 November 96-101.

[3] E.McDonnell(2005) : At Play with J:Meltov's Triumph, VECTOR Vol.21 No.4 Autumn 25-30.